Diskrétní matematika
Zadání domácích úkolů

28. prosince 2013

1 Zadáno 8. 10. 2013

Příklad 1. *Formálně zapište podmínky následujících definic pomocí proměnných, logických spojek, kvantifikátorů a pomocných symbolů (různé druhy závorek, interpunkce,...).* **[2]**

(a) Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rostoucí, pokud s rostoucím x ostře roste i hodnota $f(x)$.

(b) Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je periodická s periodou t, pokud se hodnoty $f(x)$ a $f(x+t)$ rovnají pro pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

(c) Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, pokud ke každému libovolně malému kladnému číslu ϵ existuje kladné číslo δ takové, že pro všechna reálná čísla x, pro něž platí $|x-a| < \delta$, platí také $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Příklad 2. *Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ je číslo $\sqrt{n}$ buď celé nebo již iracionální.* **[3]**

Příklad 3. *Chceme rozlámat tabulku čokolády s $m \times n$ dílky na jednotlivé dílky. Kolik nejméně rozlomení je na to potřeba? A kolik nejvíce?* **[2]**

Příklad 4. *Označme jako S_n množinu čísel, která lze zapsat ve tvaru $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm n$, kde každé $\pm$ nahradíme buď symbolem $+$ nebo $-$. Dokažte, že čísla v S_n jsou právě ta $x \in \mathbb{Z}$, pro která platí $\frac{-n(n+1)}{2} \leq x \leq \frac{n(n+1)}{2}$ a která mají všechna stejnou paritu. Jak tato parita souvisí s n?* **[5]**

2 Zadáno 15. 10. 2013

Příklad 5. *Nechť X je n prvková množina, $n \in \mathbb{N}$. Spočítejte počet uspořádaných dvojic (A, B) takových, že platí*

(a) $A \subseteq B \subseteq X$. **[3]**

(b) $|A \cap B| = 1$, kde $A, B \subseteq X$. **[3]**

Příklad 6. *Jaký je největší možný počet střelců, které lze umístit na šachovnici o rozměrech $n \times n$, aniž by se nějací dva ohrožovali? Přesný počet dokažte.* **[4]**

3 Zadáno 22. 10. 2013

Příklad 7. *Nechť $š(n)$ značí počet permutací bez pevného bodu na n-prvkové množině. Dokažte vztah* **[2]**

$$š(n) = n! - n\,š(n-1) - \binom{n}{2} š(n-2) - \cdots - \binom{n}{n-1} š(1) - 1.$$

Příklad 8. *Kolik celočíselných řešení má následující systém rovnic?* **[5]**

$$x + y + z = 25, \quad 4 \leq x \leq 8, \quad 2 \leq y \leq 11, \quad 1 \leq z \leq 10$$

Příklad 9. *Dokažte, že pro Eulerovu funkci $\varphi(n)$ a nesoudělná čásla $m, n \in \mathbb{N}$ platí* **[3]**

$$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m)\,\varphi(n).$$

Neboli ukažte, že Eulerova funkce je pro daná m a n multiplikativní.

4 Zadáno 5. 11. 2013

Příklad 10. *Najděte příklad dvojice relací (R, S) na X takové, že R i S jsou tranzitivní, ale $R \cup S$, $R \setminus S$ ani $R \Delta S$ tranzitivní nejsou. Operace symetrický rozdíl $R \Delta S$ vybere prvky, které se vyskytují v právě jedné z množin R a S, formálně $R \Delta S = (R \setminus S) \cup (S \setminus R)$.* **[3]**

Příklad 11. *Dokažte, že platí $R \circ R^{-1} = \Delta_X$, je-li relace $R \circ R^{-1}$ reflexivní a slabě antisymetrická. Symbolem Δ_X značíme nejmenší reflexivní relaci na množině X:* **[3]**

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

Příklad 12. *Zkuste odvodit vzoreček pro počet ekvivalencí na n-prvkové množině.* **[5]**

Příklad 13. *Dokažte, že uspořádaná množina $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |)$ má nekonečně mnoho minimálních prvků. O která čísla se jedná? Nakreslete příslušný Hasseův diagram na prvcích $1, 2, \ldots, 15$.* **[2]**

Příklad 14. *Dokažte, že pro lineárně uspořádané množiny je každý minimální prvek rovněž nejmenší.* **[2]**

Příklad 15. *Nalezněte posloupnost 16 přirozených čísel, která neobsahuje monotónní podposloupnost délky 5. Dokažte, že nalezená posloupnost skutečně funguje.* **[4]**

5 Zadáno 4. 12. 2013

Příklad 16. *Dokažte, že každý (konečný) graf je izomorfní nějakému indukovanému podgrafu (nekonečného) grafu $X = (\mathbb{N}, E)$, kde $\{m, n\} \in E \Leftrightarrow NSD(m, n) > 1$ (tedy vrcholy X jsou přirozená čísla a hrany spojují soudělná čísla).* **[3]**

Příklad 17. *Pro každé přirozené n sestrojte graf, který má přesně n automorfismů (včetně popisu, jak příslušné automorfismy vypadají, a důkazu, že jiné už nejsou).* **[4]**

Příklad 18. *Dokažte, že každý strom na n vrcholech ma nezávislou množinu velikosti alespoň $\lceil n/2 \rceil$. Jako nezávislou množinu označujeme množinu vrcholů, kde žádné dva vrcholy nejsou spojené hranou.* **[1]**

Příklad 19. *Strom na 4152 vrcholech má pouze vrcholy stupně 1 a 3. Kolik minimálně a maximálně může mít listů?* **[2]**

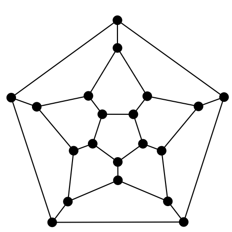
Příklad 20. *Nalezněte chybu v následujícím důkazu tvrzení „Každý graf s alespoň třemi vrcholy a se všemi stupni velikosti alespoň dva obsahuje cyklus C_3.“* **[3]**

Důkaz. Postupujeme indukcí podle počtu vrcholů n. Tvrzení platí v případě $n = 3$, protože daný graf může být jen C_3. Uvažme indukční krok, nechť G je graf na $n-1$ vrcholech, pro který tvrzení platí. Vytvoříme z něj nový graf G' na n vrcholech přidáním nového vrcholu, který je incidentní s alespoň dvěma vrcholy z G. Protože G obsahoval cyklus C_3, tak jej G' obsahuje také. $\square$

Příklad 21. *Ukažte, že každý souvislý graf G s alespoň dvěma vrcholy obsahuje dva různé vrcholy u, v, takové, že $G - u$ i $G - v$ jsou souvislé.* **[3]**

Příklad 22. *Spočtěte počet koster úplného bipartitního grafu $K_{2,n}$. Kostrou grafu G rozumíme strom, který obsahuje všechny vrcholy grafu G a je jeho podgrafem.* **[3]**

Příklad 23. *Hledání Hamiltonovských kružnic a cest. Nalezněte Hamiltonovskou kružnici pro pravidelný dvanáctistěn.* **[2]**



Příklad 24. *V orientovaném grafu hranám odpovídají uspořádané dvojice vrcholů (šipky mezi vrcholy), přičemž každý pár vrcholů tvoří nanejvýš jednu takovou dvojici. Ukažte, že každý orientovaný úplný graf obsahuje orientovanou Hamiltonovskou cestu (cyklus obsahující všechny vrcholy tvořený na sebe navazujícími šipkami stejného směru).* **[2]**

Příklad 25. *Nechť* $\alpha(G)$ *značí velikost největší podmnožiny vrcholů grafu* G*, ve které nejsou žádné dva vrcholy spojené hranou. Ukažte, že pro graf* G *s* n *vrcholy a maximálním stupněm* d *platí* **[2]**

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{d+1}.$$

Příklad 26. *Označme jako délku cesty počet jejích hran. Ukažte, že každý takový graf obsahuje cestu délky* $\min\{2\delta, n-1\}$. **[6]**

6 Zadáno 28. 12. 2013

Příklad 27. *Pro graf* G *a přirozené číslo* k *označíme jako* $G^{(k)}$ *graf s množinou vrcholů* $V(G)$*, ve kterém spojíme hranou každé dva různé vrcholy, které jsou v* G *ve vzdálenosti nanejvýš* k.

(a) Ukažte, že pro každý strom T *obsahuje graf* $T^{(3)}$ *hamiltonovský cyklus.* **[5]**

(b) Použitím části a) dokažte, že pro každý souvislý G *má graf* $G^{(3)}$ *hamiltonovský cyklus.* **[2]**

(c) Najděte souvislý graf G *takový, že* $G^{(2)}$ *nemá hamiltonovský cyklus.* **[2]**

Příklad 28. *Pro každou dvojici přirozených čísel* n, k*, která splňuje podmínky* $n \geq k+1$ *a* $2 \mid kn$*, sestrojte* k*-regulární graf na* n *vrcholech.* **[3]**

Příklad 29. *Dokažte, že pro každé* $n \geq 1$ *lze úplný graf* K_n *rozložit na hranově disjunktní cesty různé délky.* **[3]**