Diskrétní matematika – příklady na 6. cvičení*

6. listopadu 2012

1 Částečná uspořádání

Relace R se nazývá *(částečné) uspořádání*, jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní. Uspořádání R je *lineární*, pokud pro každé x, y platí $(x, y) \in R$ nebo $(y, x) \in R$.

Máme-li nějaké uspořádání $\preceq$, tak můžeme definovat odvozenou relaci *ostré nerovnosti* $\prec$ takto: $a \prec b$ právě tehdy, když $a \preceq b$ a $a \neq b$. Také lze definovat *obrácenou nerovnost*, tedy relaci $\succeq$, vztahem $a \succeq b \Leftrightarrow b \preceq a$.

Hasseův diagram je znázornění částečně uspořádané množiny $(X, \leq)$, kde každý prvek množiny X tvoří bod (vrchol). Dva vrcholy se spojí čarou (hranou) vedenou zdola nahoru od x k y, jestliže $x < y$ a neexistuje takové z, že $x < z < y$.

Nechť $(X, \preceq)$ je uspořádaná množina. Prvek $a \in X$ nazýváme *minimálním prvkem* $(X, \preceq)$, pokud neexistuje žádné $x \in X$ takové, že $x \prec a$. *Maximální prvek* a je definován podobně (neexistuje žádné $x \succ a$).

Nechť $(X, \preceq)$ je uspořádaná množina. Prvek $a \in X$ nazýváme *nejmenším prvkem* $(X, \preceq)$, jestliže pro každé $x \in X$ platí $a \preceq x$. Podobně definujeme *největší prvek* ($x \preceq a$ pro každé $x \in X$).

Příklad 1. *Uvažme relaci $\preceq$ na množině $\mathbb{R}^3$ definovanou předpisem*

$$(a_1, b_1, c_1) \preceq (a_2, b_2, c_2) \Leftrightarrow a_1 \geq a_2,\ b_1 \geq b_2,\ c_1 \leq c_2.$$

Jedná se o částečné uspořádání?

Příklad 2. *Nakreslete Hasseův diagram částečně uspořádané množiny $\left(2^{\{a,b,c,d\}}, \subseteq\right)$ (uspořádání inkluzí).*

Příklad 3. *Nechť $(X, \leq)$, $(Y, \preceq)$ jsou uspořádané množiny. Říkáme, že jsou* isomorfní, *pokud existuje bijekce $f\colon X \to Y$ taková, že pro každé $x, y \in X$ platí $x \leq y$ právě tehdy, když $f(x) \preceq f(y)$.*

(a) Nakreslete všechny navzájem neisomorfní tříprvkové částečně uspořádané množiny.

(b) Dokažte, že každé dvě n-prvkové lineárně uspořádané množiny jsou navzájem isomorfní.

(c) Najděte dvě navzájem neisomorfní lineární uspořádání množiny $\mathbb{N}$.

Příklad 4. *(a) Ukažte, že největší prvek je maximální, a ukažte příklad uspořádané množiny, která má maximální prvek, ale nemá největší prvek.*

(b) Najděte uspořádanou množinu, která nemá ani nejmenší, ani minimální prvek, ale má největší prvek.

Příklad 5. *Popište všechny relace na množině X, které jsou zároveň ekvivalencí a zároveň částečným uspořádáním.*

Příklad 6. *Dokažte, že pro lineárně uspořádané množiny je každý minimální prvek rovněž nejmenší.*

Příklad 7. *(a) Dokažte, že uspořádaná množina $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |)$ má nekonečně mnoho minimálních prvků. O která čísla se jedná? Zkuste si nakreslit příslušný Hasseův diagram na prvcích $1, \ldots, 20$.*

(b) Kolik minimálních prvků má množina $\{4k + 2 \mid k \geq 2\}$ uspořádaná relací dělitelnosti?

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/