Diskrétní matematika – 4. série domácích úkolů*

odevzdat do 20. 11. 2012

5. listopadu 2012

1 Částečná uspořádání

Realce R na množině X je *antireflexivní*, pokud pro každé $x \in X$ platí $(x, x) \notin R$. Je-li R ekvivalence na množině X, potom pro prvek $x \in X$ nazveme množinu $R[x] = \{y \in X \mid (x, y) \in R\}$ jako *třídu ekvivalence určenou prvkem x*.

Příklad 1. Nakreslete Hasseův diagram částečně uspořádané množiny$\{2^k 3^l \mid k, l \in \mathbb{N}\}$ (množina čísel dělitelných pouze 2 a 3). [2]

Příklad 2. Dokažte, že nejmenší prvek, pokud existuje, je určen jednoznačně. [1]

Příklad 3. Nechť (X, R) je částečně uspořádaná množina. Dokažte:

(a) Potom (X, R^{-1}) je rovněž částečně uspořádaná množina. [1]

(b) Prvek $x \in X$ je maximální v (X, R), právě když x je minimální v (X, R^{-1}). [2]

Příklad 4. Pro $\epsilon > 0$ definujme relaci R_ϵ na $\mathbb{R}$ tak , že $(x, y) \in R_\epsilon$, pokud x a y jsou skoro stejná, formálně $|x - y| < \epsilon$. Zadefinujme relaci $\prec$ na $\mathbb{R}$ tak, že $x \prec y$ pokud x a y nejsou skoro stejná a zároveň $x < y$. Ukažte, že $\prec$ je ostré částečné uspořádání na $\mathbb{R}$, tedy relace na $\mathbb{R}$, která je antireflexivní, asymetrická a tranzitivní. [3]

Příklad 5.

(a) Nechť $\preceq_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, jsou uspořádání na nějaké množině X. Ukažte, že $\cap_{i=1}^{k} \preceq_i$ je opět uspořádání. (Uvědomte si, že každé $\preceq_i$, jakožto relace, je podmnožinou $X \times X$.) [2]

(b) Dokažte, že libovolné částečné uspořádání $\leq$ na konečné množině X se dá vyjádřit jako průnik lineárních uspořádání. [4]

Hint: Pro uspořádanou množinu $(X, \leq)$ a prvky $a, b \in X$, $b \nleq a$, uvažte relaci $x \preceq y$, právě tehdy, když $x \leq y \ \vee \ (x \leq a \ \&\ b \leq y)$.

Příklad 6. Mějme relaci R na množině X, která je reflexivní a tranzitivní (*předuspořádání*). Definujme ekvivalenci ρ na X tak, že $(x, y) \in \rho$, právě když $(x, y) \in R$ a $(y, x) \in R$. Definujme relaci R_ρ na třídách ekvivalence ρ tak, že $(a, b) \in R_\rho$, právě když existují $x \in a$ a $y \in b$ taková, že $(x, y) \in R$.

(a) Dokažte, že pokud taková $x \in a$ a $y \in b$ existují, tak potom pro každou volbu $x \in a$ a $y \in b$ platí $(x, y) \in R$. [2]

(b) Dokažte, že R_ρ je částečné uspořádání. [2]

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/