

Diskrétní matematika – příklady na 5. cvičení*

29. října 2012

1 Princip inkluze a exkluze

Věta (Princip inkluze a exkluze). *Pro každý soubor A_1, A_2, \dots, A_n konečných množin platí*

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,\dots,n\}}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Příklad 1. *Ve třídě je 30 žáků, z nichž 12 má rádo matematiku, 14 fyziku a 13 chemii. Také víme, že 5 má rádo matematiku i fyziku, 7 fyziku i chemii a 4 žáci mají rádi matematiku i chemii. Tři žáci mají rádi všechny tři předměty. Kolik žáků nemá rádo ani jeden předmět?*

Příklad 2. *Kolik čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 1000\}$ je dělitelných 7, 10 nebo 15?*

Příklad 3. *Nechť m, n jsou přirozená čísla taková, že platí $m \geq n$. Jaký je počet surjektivních zobrazení typu $f: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$?*

Příklad 4. *Kolik existuje pořadí písmen $A, B, D, E, I, K, M, N, R, U, Z$ takových, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov $BAR, DEN, RAZIE$?*

Příklad 5 (*). *Nalezněte pomocí principu inkluze a exkluze vzorec, který umožňuje efektivně spočítat hodnotu Eulerovy funkce*

$$\varphi(n) = |\{m \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \gcd(n, m) = 1\}|$$

ze znalosti rozkladu čísla $n \in \mathbb{N}$ na prvočinitele.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>