

Diskrétní matematika – 3. série domácích úkolů*

odevzdat do 13. 11. 2012

26. října 2012

1 Princip inkluze a exkluze

Příklad 1. Necht' $\check{s}(n)$ značí počet permutací bez pevného bodu na n -prvkové množině. Dokažte vztah [2]

$$\check{s}(n) = n! - n\check{s}(n-1) - \binom{n}{2}\check{s}(n-2) - \dots - \binom{n}{n-1}\check{s}(1) - 1.$$

Příklad 2. Kolika způsoby lze seřadit do fronty 5 Čechů, 4 Maďary a 3 Rusy tak, aby všichni příslušníci žádného národa netvořili jeden souvislý blok? [2]

Příklad 3. Kolik celočíselných řešení má následující systém rovnic? [2]

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12, \quad 0 \leq x_i \leq 5$$

2 Eulerova funkce

Příklad 4. Dokažte, že pro Eulerovu funkci $\varphi(n)$ a nesoudělná čísla $m, n \in \mathbb{N}$ platí [2]

$$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \varphi(n).$$

Neboli ukažte, že Eulerova funkce je pro daná m a n multiplikativní.

Příklad 5. Pro libovolné přirozené n , dokažte vztah [4]

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

(suma je přes všechny přirozené dělitele d čísla n).

Hint: Uvažte funkci $F(n) = \sum_{d|n} \varphi(d)$ a ukažte, že je multiplikativní pro nesoudělná přirozená čísla m a n .

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>