Diskrétní matematika – příklady na 4. cvičení*

23. října 2012

1 Zbytek z relací

Příklad 1. *Nechť $R \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ je relace mezi dvojicemi přirozených čísel definována následovně:*

$$R = \{((a,b),(c,d)) \mid a+b \leq c-d\}.$$

Rozhodněte, zda je R reflexivní, symterická, tranzitivní či asymetrická.

Příklad 2. *Kolik existuje ekvivalencí na čtyřprkové množině?*

Příklad 3. *Najděte příklad dvojice relací (R_1, R_2) takové, že R_1 i R_2 jsou tranzitivní, ale $R_1 \cup R_2$, $R_1 \setminus R_2$ ani $R_1 \Delta R_2$ tranzitivní nejsou. Operace symetrický rozdíl $R_1 \Delta R_2$ vybere prvky, které se vyskytují v právě jedné z množin R_1 a R_2, formálně $R_1 \Delta R_2 = (R_1 \setminus R_2) \cup (R_2 \setminus R_1)$.*

2 Kombinatorické počítání a Dirichletův princip

Dirichletův princip. *Máme přirozená čísla $n_1, \ldots, n_k$ a rozdělení $X_1, \ldots, X_k$ množiny X, která má velikost alespoň $1 + \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)$. Potom existuje i takové, že platí $|X_i| \geq n_i$.*

Příklad 4. *Jsme v obchodě, kde mají k různých pohlednic. Chceme n kamarádům poslat pohlednici (každému právě jednu). Kolika to lze udělat způsoby? Co když chceme každému poslat různou pohlednici? Co když chceme každému poslat dvě různé pohlednice (ale různí kamarádi mohou dostat stejné)?*

Příklad 5. *Kolika způsoby lze zapsat číslo $n \in \mathbb{N}$ jako součet k přirozených čísel, kde k je pevné celé číslo v rozsahu $1 \leq k \leq n$? Co když povolíme nulové sčítance? V obou případech záleží na pořadí sčítanců.*

Příklad 6. *Mějme množinu S velikosti n. Ukažte, že počet jejích podmnožin, které mají lichou velikost, se rovná počtu jejích podmnožin sudé velikosti. Jakému číslu se daný počet rovná?*

Příklad 7. *Dokažte, že postavíme-li v posluchárně 12 židlí vedle sebe do řady a posadíme-li na ně 9 lidí (každý člověk sedí na právě jedné židli), tak vždy najdeme trojici po sobě jdoucích obsazených židlí.*

Příklad 8. *V místnosti je šest lidí, přičemž se dva z každé dvojice znají nebo neznají. "Znát někoho"je symetrická relace, tedy pokud A zná B, tak i B zná A. Ukažte, že potom vždy existuje trojice lidí, kteří se všichni navzájem buď znají, nebo neznají. Může nastat situace, kdy každý člověk zná právě tři různé osoby v místnosti, je-li tam celkem sedm lidí?*

Příklad 9 (*). *Kolik existuje k-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, v nichž se nevyskytují žádná dvě po sobě jdoucí čísla?*

Příklad 10 (*). *Jaký je počet neklesajících zobrazení $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$?*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/