

Diskrétní matematika – příklady na 3. cvičení*

15. října 2012

1 Relace

Příklad 1. *Kolik je na n -prvkové množině X relací? Kolik z nich je reflexivních? Kolik symetrických? Kolik obojí?*

Příklad 2. *Nechť R a S jsou ekvivalence na množině X . Rozhodněte, které z následujících relací jsou nutně také ekvivalence:*

(a) $R \cap S$

(b) $R \cup S$

(c) $R \setminus S$

(d) $R \circ S$

(e) $R^{-1} \circ S^{-1}$

Příklad 3. *Nechť $R \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ je relace mezi dvojicemi přirozených čísel definována následovně:*

$$R = \{((a, b), (c, d)) \mid a + b \leq c - d\}.$$

Rozhodněte, zda je R reflexivní, symetrická, tranzitivní či asymetrická.

Příklad 4. *Kolik existuje ekvivalencí na čtyřprvkové množině?*

Příklad 5. *Najděte příklad dvojice relací (R_1, R_2) takové, že R_1 i R_2 jsou tranzitivní, ale $R_1 \cup R_2$, $R_1 \setminus R_2$ ani $R_1 \Delta R_2$ tranzitivní nejsou. Operace symetrický rozdíl $R_1 \Delta R_2$ vybere prvky, které se vyskytují v právě jedné z množin R_1 a R_2 , formálně $R_1 \Delta R_2 = (R_1 \setminus R_2) \cup (R_2 \setminus R_1)$.*

2 Kombinatorické počítání a Dirichletův princip

Příklad 6. *Z kolika hesel máme na výběr, pokud každé heslo může obsahovat pouze písmena z anglické abecedy a musí mít délku 8? Co když navíc může obsahovat jen právě jednu samohlásku?*

Příklad 7. *Mějme množinu S velikosti n . Ukažte, že počet jejích podmnožin, které mají lichou velikost, se rovná počtu jejích podmnožin sudé velikosti. Jakému číslu se daný počet rovná?*

Příklad 8. *Dokažte, že postavíme-li v posluchárně 12 židlí vedle sebe do řady a posadíme-li na ně 9 lidí (každý člověk sedí na právě jedné židli), tak vždy najdeme trojici po sobě jdoucích obsazených židlí.*

Příklad 9. *V místnosti je šest lidí, přičemž se dva z každé dvojice znají nebo neznají. "Znát někoho" je symetrická relace, tedy pokud A zná B , tak i B zná A . Ukažte, že potom vždy existuje trojice lidí, kteří se všichni navzájem buď znají, nebo neznají. Může nastat situace, kdy každý člověk zná právě tři různé osoby v místnosti, je-li tam celkem sedm lidí?*

Příklad 10 (*). *Kolik existuje k -prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, v nichž se nevyskytují žádná dvě po sobě jdoucí čísla?*

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>