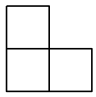
Diskrétní matematika – příklady na 2. cvičení[*]

8. října 2012

1 Matematická indukce

Příklad 1. *Mějme šachovnici o rozměrech $2^n \times 2^n$ pro $n \in \mathbb{N}$, na které chybí jedno rohové políčko. Ukažte, že je možné ji celou vydláždit dlaždicemi následujícího tvaru:*



Příklad 2. *Dokažte matematickou indukcí platnost následujících vztahů pro každé $n \in \mathbb{N}$*

(a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1)$.

(b) $\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$.

(c) $\prod_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}$ *(pro $n \geq 2$).*

Příklad 3. *Dokažte matematickou indukcí vztah $4 \mid \left(6n^2 + 2n\right)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

Příklad 4. *Uvažme Fibonacciho posloupnost $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, což je posloupnost splňující rekurentní podmínky $F_1 = F_2 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 3$. Ukažte, že platí $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$.*

Příklad 5 (*)**.** *Dokažte, že každé $n \in \mathbb{N}$ lze jednoznačně zapsat ve tvaru $n = \sum_{j=1}^{k} F_{i_j}$, kde platí $i_1 \geq 2$ a pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ je $i_{j+1} \geq i_j + 2$.*

Příklad 6. *Dokažte indukcí Moivreovu větu, která říká, že pro libovolné $x \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$(\cos(x) + i \sin(x))^n = \cos(nx) + i \sin(nx).$$

Příklad 7. *Mějme n přímek v obecné poloze v rovině (tj. žádné tři se neprotínají v jednom bodě a žádné dvě nejsou rovnoběžné). Ukažte, že rovina je těmito přímkami rozdělena na $\frac{1}{2} n (n+1) + 1$ částí.*

Příklad 8. *Dokažte, že oblasti v rovinné mapě, která je tvořena n kružnicemi, z nichž každá protíná všechny ostatní, lze obarvit dvěma barvami tak, že spolu nesousedí žádné dvě oblasti stejné barvy.*

Příklad 9 (*)**.** *Označme jako S_n množinu čísel, která lze zapsat ve tvaru $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm n$, kde každé $\pm$ nahradíme buď symbolem $+$ nebo $-$. Dokažte, že čísla v S_n jsou právě ta $x \in \mathbb{Z}$, pro která platí $\frac{-n(n+1)}{2} \leq x \leq \frac{n(n+1)}{2}$ a která mají všechna stejnou paritu. Jak tato parita souvisí s n?*

Příklad 10 (*)**.** *Indukcí dokažte nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Neboli, že pro každých n kladných reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Příklad 11. *Najděte chybu ve zmíněném důkazu tvrzení: Všichni koně mají stejnou barvu.*

Důkaz. Nechť n je počet koní. Pokud $n = 1$, tak jeden kůň má jen jednu barvu. Nechť tedy n koní má stejnou barvu. Potom uvažme $n+1$ koní. Můžeme je rozdělit do dvou skupin $\{1, 2, \ldots, n\}$ a $\{2, 3, \ldots, n+1\}$. Z indukčního kroku mají koně v každé skupině tutéž barvu. Množiny se překrývají a tedy všech $n+1$ koní má stejnou barvu. Z indukce pak toto tvrzení platí pro všechny koně. $\square$

[*]Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/