

Diskrétní matematika – 1. série domácích úkolů*

odevzdat do 16. 10. 2012

29. září 2012

1 Výroky

Příklad 1. Dokažte De Morganovy zákony [1]

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \ \& \ \neg q);$$

$$\neg(p \ \& \ q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q).$$

Příklad 2. Formálně запиšte podmínky následujících definic pomocí proměnných, logických spojek, kvantifikátorů a pomocných symbolů (různé druhy závorek, interpunkce, ...). [1]

- (a) Funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je *rostoucí*, pokud s rostoucím x ostře roste i hodnota $f(x)$.
- (b) Funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je *periodická s periodou t* , pokud se hodnoty $f(x)$ a $f(x+t)$ rovnají pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
- (c) Funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je *spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$* , pokud ke každému libovolně malému kladnému číslu ϵ existuje kladné číslo δ takové, že pro všechna reálná čísla x , pro něž platí $|x - a| < \delta$, platí také $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

2 Důkazová technika

Příklad 3. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí [2]

$$\sum_{k=1}^n k^2 3^k = \frac{3}{2} (3^n (n^2 - n + 1) - 1).$$

Příklad 4. Pro všechna celá čísla $n \geq r \geq 1$ dokažte, že platí [3]

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \dots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

(Pozor! Při postupu matematickou indukcí podle n při pevném r nestačí jako začátek indukce zvolit $n = r = 1$.)

Příklad 5. Dokažte, že každé nenulové racionální číslo lze zapsat jako součin dvou iracionálních čísel. [2]

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>