

Algoritmická teorie her – příklady na 3. cvičení*

1 Čistá Nashova ekvilibria

Nejlepší odpovědí hráče i na strategický profil s_{-i} je smíšená strategie s_i^* taková, že $u_i(s_i^*; s_{-i}) \geq u_i(s'_i; s_{-i})$ pro každou strategii $s'_i \in S_i$. Nashovým ekvilibriem v $G = (P, A, u)$ je strategický profil $(s_1, \dots, s_n)$ takový, že s_i je nejlepší odpovědí hráče i na s_{-i} pro každé $i \in P$.

V čistém Nashově ekvilibriu (PNE) jsou všechny strategie čisté. Připomeňme, že čistá Nashova ekvilibria nemusí vždy existovat, viz Kámen-nůžky-papír. Nashovo ekvilibrium je *symetrické*, pokud všichni hráči používají stejnou strategii.

Příklad 1. Mějme dva hráče, kteří se snaží si rozdělit 100 Kč. První z nich si zvolí $x \in \{0, \dots, 100\}$ a nabídne, že si nechá $100 - x$ korun a oponent x . Druhý hráč má možnost nastavit si limit y nejmenší nabídky, kterou ještě přijme. Pokud $x \geq y$, pak je nabídka přijata a hráči dostanou výplatu $100 - x$ a x . Pokud $x < y$, pak je nabídka odmítnuta a oba získají výplatu 0.

- (a) Zahrajte si tuto hru se sousedem v lavici (klidně i opakovaně a nemusíte používat opravdové peníze). Jaké jste zvolili x a y ?
- (b) Jaká jsou všechna čistá Nashova ekvilibria této hry?

Příklad 2. Uvažme následující symetrickou hru dvou hráčů. Každý hráč má akce $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. Po zvolení čísla každým z hráčů dostanou oba výplatu 0, pokud se zvolená čísla shodují. Pokud se liší a jedno z čísel dělí to druhé, pak hráč s menším číslem dostane výplatu -2 a ten s větším $+2$. V každém dalším případě dostává hráč s větším číslem $+1$ a ten s menším -1 .

- (a) Zahrajte si tuto hru se sousedem v lavici. Jaké jste zvolili (případně smíšené) strategie?
- (b) Najděte čisté Nashovo ekvilibrium této hry.

Příklad 3. Mějme $n \geq 2$ firem, kde si každá firma vybere reálné číslo $q_i \in [0, 50]$ udávající, kolik zboží vyrobí (jde tedy o hru s nekonečně mnoha akcemi pro každého hráče). Poté je zisk i -té firmy roven $q_i \cdot P$, kde $P = 100 - (q_1 + \dots + q_n)$.

- (a) Zahrajte si tuto hru se sousedem v lavici či případně i ve větší skupince. Můžete hrát i opakovaně.
- (b) Nalezněte čisté symetrické ekvilibrium této hry.

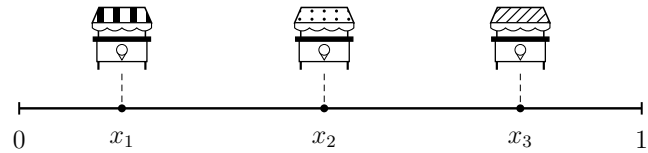
Příklad 4. Uvažme následující hru pro $n \geq 2$ hráčů. Každý hráč i nezávisle vybere číslo m_i z množiny $\{1, \dots, 1000\}$. Cílem každého hráče je vybrat číslo, které je nejbližší polovině průměru vybraných čísel. Všichni hráči, jejichž číslo je nejbližší polovině průměru, si rovnoměrně rozdělí výplatu 1.

- (a) Zahrajte si tuto hru se sousedem v lavici či ve větší skupince. Můžete hrát i opakovaně.
- (b) Nalezněte všechna čistá ekvilibria této hry.
- (c) Jak se změní čistá ekvilibria této hry, pokud každý hráč, který je nejbližší polovině průměru, dostane výplatu 1?

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~cizek/>

Příklad 5 (Týdenní výzva). Pláž je reprezentována intervalem $[0, 1]$, podél něhož jsou rovnoměrně rozmístěni zákazníci. Každý z n prodejců zmrzliny si současně zvolí polohu $x_i \in [0, 1]$ svého stánku (jde tedy o hru s nekonečně mnoha akcemi pro každého hráče). Na stejném místě může stát více stánků.

Každý zákazník nakupuje u nejbližšího stánku. Pokud je nejbližších stánků více, rozdělí se zákazníkův nákup rovnoměrně mezi ně. Výplatou prodejce je podíl všech nákupů, který připadne jeho stánku.



- (a) Najděte všechna čistá Nashova ekvilibria pro $n = 2$.
- (b) Dokažte, že pro $n = 3$ neexistuje žádné čisté Nashovo ekvilibrium.
- (c) Najděte všechna čistá Nashova ekvilibria pro $n = 4$.