

# Algoritmická teorie her – příklady na 9. cvičení\*

## 1 Hry v rozšířené formě

*Sekvenční forma* hry  $G$  s neúplnou informací je čtveřice  $(P, S, u, C)$ , kde  $P$  je množinou  $n$  hráčů,  $S = (S_1, \dots, S_n)$ , kde  $S_i$  je množinou posloupností hráče  $i$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n)$ , kde  $u_i: S \rightarrow \mathbb{R}$  je výplatní funkce hráče  $i$  a  $C = (C_1, \dots, C_n)$  je systémem lineárních rovností na realizační pravděpodobnosti hráče  $i$ .

Následující výsledek ukazuje, jak se dá sekvenční forma využít k nalezení NE v rozšířených hrách s nulovým součtem.

**Věta 1.** *Nashova ekvilibria rozšířené hry dvou hráčů s nulovým součtem a s dokonalou pamětí jsou řešenými následujícího lineárního programu:*

$$\min_{u,y} e^\top u \text{ za podmínek } Fy = f, E^\top u - Ay \geq \mathbf{0}, y \geq \mathbf{0}.$$

Následující výsledek ukazuje, jak se dá sekvenční forma využít k získání NE v rozšířených hrách s nulovým součtem.

**Věta 2.** *Pár  $(x, y)$  realizačních plánů rozšířené hry dvou hráčů s dokonalou pamětí je Nashovým ekvibiem právě tehdy, když existují vektory  $u$  a  $v$  splňující následující podmínky:*

$$\begin{aligned} x^\top (E^\top u - Ay) &= 0, & y^\top (F^\top v - B^\top x) &= 0, \\ Ex = e, x &\geq \mathbf{0}, & Fy = f, y &\geq \mathbf{0}, \\ E^\top u - Ay &\geq \mathbf{0}, & F^\top v - B^\top x &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

**Příklad 1.** *Nechť  $G$  je rozšířená hra dvou hráčů s úplnou informací reprezentovaná  $d$ -regulárním stromem výšky  $2m + 1$ , kde  $d \geq 2$  a  $m \geq 1$  jsou celá čísla a kde se hráči střídají po tazích. Bud'  $G'$  hra v normálním tvaru získaná z  $G$ , kde množina akcí každého hráče sestává z množiny čistých strategií v  $G$ . Kolik je (asymptoticky) akčních profilů v  $G'$ ?*

**Příklad 2.** *Uvažme následující jednoduchou variantu Pokeru pro dva hráče:*

1. Hráč 1 dostane buď eso nebo krále.
2. Hráč 2 dostane buď eso nebo krále.
3. „Pot“ (peníze na stole, o které hráči hrají) je dva dolary.
4. Hráč 1 je na tahu a může buď vsadit jeden dolar nebo checknout (nevsadit)
5. Hráč je na tahu a může buď vsadit nebo checknout (pokud checknul Hráč 1) nebo, pokud Hráč 1 vsadil, pak může buď dorovnat sázku nebo složit (vzdát se).
6. Hráč 1 je nyní na tahu pouze pokud checkoval jako první a druhý hráč vsadil. Pak může buď dorovnat nebo složit.
7. Hráč, který složil nebo měl horší kartu, prohrává pot i případně sázku.

Formulujte tuto hru jako rozšířenou hru s neúplnou informací dvou hráčů s náhodným hráčem 0.

**Příklad 3.** *Formulujte Matching pennies jako hru v rozšířené formě podle Tabulky 1 a napište její sekvenční formu a příslušný lineární program pro nalezení Nashových ekvibiů této hry.*

**Příklad 4.** *Formulujte Hru na kuře jako hru v rozšířené formě podle Tabulky 2 a napište její sekvenční formu a příslušný problém komplementarity pro nalezení Nashových ekvibiů této hry.*

---

\*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~cizek/>

|       | Panna  | Orel   |
|-------|--------|--------|
| Panna | (1,-1) | (-1,1) |
| Orel  | (-1,1) | (1,-1) |

Tabulka 1: Matching Pennies v normální tvaru.

|      | Stůj   | Jed'      |
|------|--------|-----------|
| Stůj | (0,0)  | (-1,1)    |
| Jed' | (1,-1) | (-10,-10) |

Tabulka 2: Hra na kuře v normálním tvaru.