Algoritmická teorie her – příklady na 4. cvičení*

1 Maticové hry

Maticová hra je hrou v normálním tvaru pro 2 hráče. Maticová hra je *nedegenerovaná*, pokud každý hráč má nanejvýš k nejlepších čistých odpovědí na každou strategii s doménou velikosti k. *Maticová hra s nulovým součtem* je hra, kde užitek jednoho hráče se vždy rovná ztrátě druhého. U maticové hry $G = (\{1,2\}, A, u)$ s $A_1 = \{1,\dots,m\}$ a $A_2 = \{1,\dots,n\}$ používáme výplatní matice M a N, kde $(M)_{i,j} = u_1(i,j)$ a $(N)_{i,j} = u_2(i,j)$ pro všechna $i \in A_1$ a $j \in A_2$.

Na přednášce jsme si ukazovali následující algoritmus pro výpočet Nashových ekvilibrií nedegenerovaných maticových her.

Algorithm 1.1: SUPPORT ENUMERATION(G)

Vstup: Nedegenerovaná maticová hra G.
Výstup: Všechna Nashova ekvilibria hry G.
for každé $k \in \{1,\dots,\min\{m,n\}\}$ a dvojici domén (I,J) velikosti k
- Vyřešte systém rovností $\sum_{i\in I}(N^\top)_{j,i}x_i = v, \sum_{j\in J}(M)_{i,j}y_j = u$, pro každé $i \in I, j \in J$ a $\sum_{i\in I} x_i = 1, \sum_{j\in J} y_j = 1$.
- Pokud $x, y > \mathbf{0}$ a $u = \max\{(M)_i y \colon i \in A_1\}, v = \max\{(N^\top)_j x \colon j \in A_2\}$,
- pak vraťte (x,y) jako Nashovo ekvilibrium.

Příklad 1. *Použijte algoritmus Support enumeration z přednášky a nalezněte Nashovo ekvilibrium Hry na kuře s doménami velikosti 2.*

	Zatočit (1)	Jet rovně (2)
Zatočit (1)	$(0,0)$	$(-1,1)$
Jet rovně (2)	$(1,-1)$	$(-10,-10)$

Tabulka 1: Hra na kuře.

Příklad 2. *Ukažte, že Hra o duši Gothamu je degenerovaná. Použijte algoritmus Support enumeration z přednášky a nalezněte Nashovo ekvilibrium s doménami $I = \{2\}$ a $J = \{1,2\}$.*

	Spolupracovat (1)	Detonovat (2)
Spolupracovat (1)	$(0,0)$	$(0,1)$
Detonovat (2)	$(1,0)$	$(0,0)$

Tabulka 2: Hra o duši Gothamu.

Příklad 3. *Rozhodněte, které z těchto výplatních matic určují degenerované hry.*

(a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ a $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ a $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~cizek/

Příklad 4 (*)**.** *Dokažte, že je-li maticová hra nedegenerovaná, pak systém rovností z algoritmu Support enumeration má nejvýš jedno řešení splňující* $\mathbf{x}, \mathbf{y} > \mathbf{0}$*,* $u = \max\{(M)_i y \colon i \in A_1\}$ *a* $v = \max\{(N^\top)_j x \colon j \in A_2\}$*.*

Nápověda: Ukažte, že existuje-li více řešení, tak pak lze zredukovat doménu.

Příklad 5. *Dokažte, že následující lineární programy z důkazu Minimaxové věty jsou navzájem duální.*

(a) *Pro matici* $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$*,*

	Program P	Program D
Proměnné	$y_1, \ldots, y_n$	x_0
Účelová funkce	$\min x^\top M y$	$\max x_0$
Omezení	$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,$	$\mathbf{1} x_0 \leq M^\top x.$
	$y_1, \ldots, y_n \geq 0.$	

(b) *Pro matici* $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$*,*

	Program P'	Program D'
Proměnné	$y_0, y_1, \ldots, y_n$	$x_0, x_1, \ldots, x_m$
Účelová funkce	$\min y_0$	$\max x_0$
Omezení	$\mathbf{1} y_0 - M y \geq \mathbf{0},$	$\mathbf{1} x_0 - M^\top x \leq \mathbf{0},$
	$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,$	$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$
	$y_1, \ldots, y_n \geq 0.$	$x_1, \ldots, x_m \geq 0.$

Můžete použít kuchařku na vytváření duálních programů z přednášky.

	Primární úloha	Duální úloha
Proměnné	$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$	$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$
Matice	$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$	$A^\top \in \mathbb{R}^{m \times n}$
Pravá strana	$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$	$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$
Účelová funkce	$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$	$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$
Podmínky	i-tá podmínka má $\leq$	$y_i \geq 0$
	$\geq$	$y_i \leq 0$
	$=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \geq 0$	j-tá podmínka má $\geq$
	$x_j \leq 0$	$\leq$
	$x_j \in \mathbb{R}$	$=$