Algoritmická teorie her – příklady na 2. cvičení*

1 Nashova ekvilibria

Hra v normálním tvaru je trojicí (P, A, u), kde P je množina n *hráčů*, $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ je množina *profilů akcí*, kde A_i označuje množinu *akcí* hráče i, a $u = (u_1, \ldots, u_n)$ je n-ticí, ve které každé $u_i \colon A \to \mathbb{R}$ je *užitkovou funkcí* hráče i.

Množina *čistých strategií* hráče i je množinou A_i akcí hráče i. Množina S_i *smíšených strategií* hráče i je množinou pravděpodobnostních rozdělení na A_i. *Střední hodnotou užitkové funkce* hráče i na smíšeném strategickém profilu $s = (s_1, \ldots, s_n)$ je

$$u_i(s) = \sum_{a=(a_1,\ldots,a_n)\in A} u_i(a) \prod_{j=1}^{n} s_j(a_j).$$

Použijeme značení $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ a, pro strategii $s'_i \in S_i$ hráče i, použijeme $u_i(s'_i; s_{-i})$ k označení čísla $u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$.

Nejlepší odpovědí hráče i na strategický profil s_{-i} je smíšená strategie s^*_i taková, že $u_i(s^*_i; s_{-i}) \geq u_i(s'_i; s_{-i})$ pro každou strategii $s'_i \in S_i$. *Nashovým ekvilibriem* v G je strategický profil $(s_1, \ldots, s_n)$ takový, že s_i je nejlepší odpovědí hráče i na s_{-i} pro každé $i \in P$.

Pozorování 1 (Best response condition)**.** *V normální hře $G = (P, A, u)$ n hráčů je pro každého hráče $i \in P$ smíšená strategie s_i nejelpší odpovědí na s_{-i} právě tehdy, když všechny čisté strategie v doméně s_i jsou nejlepšími odpověďmi na s_{-i}.*

Příklad 1. *Ověřte, že střední hodnota užitkové funkce ve hře $G = (P, A, u)$ v normálním tvaru pro n hráčů je lineární. Neboli dokažte, že $u_i(s) = \sum_{a_i \in A_i} s_i(a_i) u_i(a_i; s_{-i})$ pro každého hráče $i \in P$ a každý smíšený strategický profil $s = (s_1, \ldots, s_n)$.*

Příklad 2. *Spočítejte Nashova ekvilibria v následujících hrách:*

*(*a*) Vězňovo dilema,*

	Svědčit	Mlčet
Svědčit	(-2,-2)	(0,-3)
Mlčet	(-3,0)	(-1,-1)

Tabulka 1: Vězňovo dilema v normálním tvaru.

*(*b*) Kámen-nůžky-papír.*

	Kámen	Papír	Nůžky
Kámen	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
Papír	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
Nůžky	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

Tabulka 2: Kámen-nůžky-papír v normálním tvaru.

Formálně dokažte, že žádná jiná ekvilibria v těchto hrách neexistují.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Příklad 3 (Iterovaně dominovaná ekvilibria)**.** *Nechť $G = (P, A, u)$ je hra v normálním tvaru pro n hráčů. Pro každého hráče i řekneme, že strategie $s_i \in S_i$ je* ostře dominovaná *strategií $s'_i \in S_i$, pokud pro každé $s_{-i} \in S_{-i}$ máme $u_i(s_i; s_{-i}) < u_i(s'_i; s_{-i})$. Uvažte následující iterovaný proces, který nám v některých hrách pomůže najít Nashovo ekvilibrium.*

Nastavme $A_i^0 = A_i$ a $S_i^0 = S_i$ pro každého hráče $i \in P$. Pro $t \geq 1$ and $i \in P$ buď A_i^t množina čistých strategií z A_i^{t-1}, které nejsou ostře dominovány strategií z S_i^{t-1} a buď S_i^t množina smíšených strategií, které mají support obsažený v A_i^t. Nechť T je prvním krokem, ve kterém se množiny A_i^T a S_i^T již nezmenšují pro žádného hráče $i \in P$. Má-li poté každý hráč $i \in P$ pouze jednu strategii $a_i \in A_i^T$, tak řekneme, že $a_1 \times \cdots \times a_n$ je iterovaně dominované ekvilibrium *hry G.*

(a) *Ukažte, že iterovaně dominované ekvilibrium je Nashovým ekvilibriem.*

(b) *Nalezněte příklad hry, která má čisté Nashovo ekvilibrium, které není iterovaně dominovaným ekvilibriem.*

Příklad 4. *Použijte metodu z Příkladu 3 k nalezení unikátního Nashova ekvilibria v následující hře dvou hráčů (viz Tabulka 3) zredukováním této hry na hru 2×2.*

	c_1	c_2	c_3	c_4
r_1	(5, 2)	(22, 4)	(4, 9)	(7, 6)
r_2	(16, 4)	(18, 5)	(1, 10)	(10, 2)
r_3	(15, 12)	(16, 9)	(18, 10)	(11, 3)
r_4	(9, 15)	(23, 9)	(11, 5)	(5, 13)

Tabulka 3: Hra z příkladu 4.