

Algoritmická teorie her – příklady na 10. cvičení*

1 Motivace

Hlavním cílem návrhu mechanismů je vytvořit pravidla hry tak, aby racionální hráči dospěli k požadovaným výstupům. To není vždy snadné zařídit a špatné mechanismy mohou vést k nežádoucím výsledkům.

Příklad 1. Uvažme následující aukci. Prodávající nabízí 50 Kč nejvyššímu nabízejícímu. Aukce začíná na 10 Kč a v každém kroce se navyšuje o 5 Kč. Nejvyšší nabízející vyhrává 50 Kč, ale nejvyšší nabízející a druhý nejvyšší nabízející musí oba zaplatit svoje nabídky.

Příklad 2. Starosta by chce namotivovat řidiče autobusů a rozhodl se jim nabídnout bonus, který se rovná 10% z ceny lístků, které každý řidič prodá. Jaký vliv to bude mít na autobusovou dopravu?

Příklad 3. Během okupace Indie měli britští vojáci problém s přemnoženými kobrami. Jako řešení se rozhodli nabízet odměny místním za každou zabitou kobru. Dovedete odhadnout, co se stalo?

2 Základy návrhu mechanismů

V jednoparametrovém prostředí máme n nabízejících, kteří se snaží získat jisté zboží. Každý nabízející i má soukromou valuaci v_i a také máme přípustnou množinu $X \subseteq \mathbb{R}^n$ odpovídající možným výstupům. Aukce s tajnými nabídkami v tomto prostředí pak probíhá ve třech krocích.

- (a) Prodávající sebere nabídky $b = (b_1, \dots, b_n)$, kde b_i je nabídka nabízejícího i .
- (b) Alokační pravidlo: Vyber možný výstup (alokaci zboží) $x = x(b)$ z přípustné množiny X v závislosti na nabídkách b .
- (c) Platební pravidlo: Zvol platby $p(b) = (p_1(b), \dots, p_n(b)) \in \mathbb{R}^n$ v závislosti na nabídkách b .

Pár (x, p) poté dohromady tvoří mechanismus. Užitek $u_i(b)$ nabízejícího i je definován jako $u_i(b) = v_i \cdot x_i(b) - p_i(b)$.

Aukce je DSIC, pokud splňuje následující dvě podmínky. Každý kupující má jako dominantní strategii nabízet pravdivě, tedy nastavení jeho nabídky b_i na svojí valuaci v_i . Navíc užitek každého kupujícího, který nabízí pravdivě, je nezáporný. Strategie je dominantní, pokud maximalizuje užitek daného hráče nezávisle na tom, co dělají ostatní hráči. Příkladem jednopoložkové DSIC aukce je Vickreyho aukce, ve které vyhrává nejvyšší nabízející a platí druhou nejvyšší nabídku.

Aukce je super, pokud splňuje následující tři podmínky:

- (a) Aukce je DSIC.
- (b) Pokud nabízející nabízejí pravdivě, pak maximalizujeme sociální zisk $\sum_{i=1}^n v_i x_i$.
- (c) Aukce běží v polynomiálním čase.

Příklad 4. Uvažme 1-položkovou aukci s aspoň třemi kupujícími. Dokažte, že prodáním dražené položky kupujícímu s nejvyšší nabídkou za cenu, která se rovná třetí nejvyšší nabídce, dostaneme aukci, která není DSIC.

Příklad 5. Uvažme 1-položkovou aukci, kde vítězí hráč s nejvyšší nabídkou a platí cenu odpovídající druhé nejvyšší nabídce se slevou 10%. Například se třemi kupujícími a nabídkami $b = (11, 7, 10)$ vítězí první kupující a platí $10 \cdot 0.9 = 9$. Dokážete najít dominantní strategii v této aukci? Je to nabízet pravdivě?

Příklad 6. Uvažujme následující aukci s jednou položkou a s prioritizovanou způsobilostí. Prodávající přiřadí každému nabízejícímu i veřejně známou úroveň priority p_i (například na základě věrnosti nebo seniority). Pouze nabízející s prioritou $p = \max_j p_j$ jsou způsobilí vyhrát a položka je přidělena nejvyšší způsobilé nabídce. Vítěz zaplatí maximum z druhé nejvyšší nabídky mezi všemi způsobilými nabízejícími. Je tato aukce DSIC? Je „super“?

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~ballo/>

Příklad 7. Předpokládejme, že v aukci prodáváme k identických položek celkem $n > k$ kupujícím. Předpokládejme, že každý kupující může získat nanejvýš jednu položku. Jak vypadá příslušná varianta Vickreyovy aukce? Platí v ní j -tý nejvyšší nabízející $(j + 1)$ -ní nejvyšší nabídku pro $j \leq k$? Dokažte, že je vaše varianta DSIC.