

Algoritmická teorie her – příklady na 9. cvičení*

20. prosince 2023

1 Hry v rozšířené formě

Sekvenční forma hry G s neúplnou informací je čtveřice (P, S, u, C) kde P je množinou n hráčů, $S = (S_1, \dots, S_n)$, kde S_i je množinou posloupností hráče i , $u = (u_1, \dots, u_n)$, kde $u_i: S \rightarrow \mathbb{R}$ je výplatní funkce hráče i a $C = (C_1, \dots, C_n)$ je množinou lineárních podmínek na realizační pravděpodobnosti hráče i .

Exercise 1. Zkonstruuje rozšířenou formu Hry na kuře z Tabulky 1 a určete její sekvenční formu a problém komplementarity pro nalezení Nashových ekvilibrií v této hře.

	Zatoč	Rovně
Zatoč	(0,0)	(-1,1)
Rovně	(1,-1)	(-10,-10)

Tabulka 1: Hra na kuře v normální formě.

2 Základy návrhu mechanismů

Aukce je *DSIC*, pokud splňuje následující dvě podmínky. Každý kupující má jako dominantní strategii *nabízet pravdivě*, tedy nastavení jeho nabídky b_i na svojí valuaci v_i . Navíc užitek každého kupujícího, který nabízí pravdivě, je nezáporný. Strategie je *dominantní*, pokud maximalizuje užitek daného hráče nezávisle na tom, co dělají ostatní hráči.

Theorem 1 (Myersonovo lemma). *V jednoparametrových prostředích platí následující tři tvrzení.*

- (a) *Alokační pravidlo je implementovatelné právě tehdy, když je monotónní.*
- (b) *Je-li alokační pravidlo x monotónní, pak existuje jediné platební pravidlo p takové, že mechanismus (x, p) je DSIC (za předpokladu, že $b_i = 0$ implikuje $p_i(b) = 0$).*
- (c) *Platební pravidlo p je určené následujícím vzorcem*

$$p_i(b_i; b_{-i}) = \int_0^{b_i} z \cdot \frac{d}{dz} x_i(z; b_{-i}) dz$$

pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exercise 2. *Uvažme 1-položkovou aukci s aspoň třemi kupujícími. Dokažte, že prodáním dražené položky kupujícímu s nejvyšší nabídkou za cenu, která se rovná třetí nejvyšší nabídce, dostaneme aukci, která není DSIC.*

Exercise 3. *Použitím Myersonova lemma dokažte, že Vickreyho aukce je jedinou jednopoložkovou aukcí, která je DSIC a která vždy vybere kupujícího s nejvyšší valuací zatímco ostatním kupujícím naučtuje 0.*

Exercise 4. *Uvažme 1-položkovou aukci, kde vítězí hráč s nejvyšší nabídkou a platí cenu odpovídající druhé nejvyšší nabídce se slevou 10%. Například se třemi kupujícími a nabídkami $b = (11, 7, 10)$ vítězí první kupující a platí $10 \cdot 0.9 = 9$. Dokažte najít dominantní strategii v této aukci? Je jí pravdivé nabízení?*

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>