Algoritmická teorie her – příklady na 8. cvičení*

6. prosince 2023

1 Swap regret a interní regret

Pro posloupnost $(p^t)_{t=1}^T$ pravděpodobnostních rozdělení vystoupených algoritmem A a pro modifikační pravidlo $F\colon X \to X$, definujeme *modifikovanou posloupnost* $(f^t)_{t=1}^T = (F^t(p^t))_{t=1}^T$, kde $f^t = (f_1^t, \dots, f_N^t)$ a $f_i^t = \sum_{j\colon F^t(j)=i} p_j^t$. *Ztráta modifikované posloupnosti* je pak $L_{A,F}^T = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N f_i^t \ell_i^t$. Pro posloupnost ℓ^t ztrátových vektorů je *regret algoritmu A vzhledem k $\mathcal{F}$* rovný $R_{A,\mathcal{F}}^T = \max_{F \in \mathcal{F}} \left\{L_A^T - L_{A,F}^T\right\}$. Externí regret algoritmu A je potom $R_{A,\mathcal{F}^{ex}}^T$, kde $\mathcal{F}^{ex} = \{F_i\colon i \in X\}$ obsahuje modifikační pravidla $F_i = (F_i^t)_{t=1}^T$ taková, že F_i^t vždy vrací akci i. *Interní regret* algoritmu A je $R_{A,\mathcal{F}^{in}}^T$ pro množinu $\mathcal{F}^{in} = \{F_{i,j}\colon (i,j) \in X \times X, i \neq j\}$ of $N(N-1)$ modifikačních pravidel $F_{i,j} = (F_{i,j}^t)_{t=1}^T$, kde v každém kroce t, $F_{i,j}^t(i) = j$ a $F_{i,j}^t(i') = i'$ pro každé $i' \neq i$. *Swap regret* algoritmu A je $R_{A,\mathcal{F}^{sw}}^T$ pro množinu $\mathcal{F}^{sw}$ všch modifikačních pravidel $F\colon X \to X$.

Exercise 1. *Ukažte, že swap regret je vždy nanejvýš N-krát tak velký jako interní regret.*

Exercise 2. *Dokažte, že pravděpodobnostní rozdělení p je korelovaným ekvilibriem, neboli*

$$\mathbb{E}_{a\sim p}[C_i(a) \mid a_i] \leq \mathbb{E}_{a\sim p}[C_i(a_i'; a_{-i}) \mid a_i]$$

pro každého hráče $i \in P$ a všechna $a_i, a_i' \in A_i$, právě tehdy, když

$$\mathbb{E}_{a\sim p}[C_i(a)] \leq \mathbb{E}_{a\sim p}[C_i(F(a_i); a_{-i})]$$

pro každého hráče $i \in P$ a každé modifikační pravidlo $F\colon A_i \to A_i$.

Hint: Může se hodit nahlédnout, že platí $\mathbb{E}_{a\sim p}[C_i(a)] = \sum_{a_i \in A_i} P(a_i) \cdot \mathbb{E}_{a\sim p}[C_i(a) \mid a_i]$, kde $P(a_i) = \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} p(a_i; a_{-i})$ je pravděpodobnost, že hráči i je doporučeno a_i.

Exercise 3. *Buď $G = (P, A, C)$ hra v normálním tvaru pro n hráčů, $\varepsilon > 0$ a $T = T(\varepsilon) \in \mathbb{N}$. Nechť po T krocích No-swap-regret dynamics má každý hráč $i \in P$ průměrný swap regret nanejvýš ε. Definujme $p^t = \prod_{i=1}^n p_i^t$ součin smíšených strategií hráčů v kroce t a buď $p = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T p^t$. Ukažte, že p is ε-korelované ekvilibirium, neboli*

$$\mathbb{E}_{a\sim p}[C_i(a)] \leq \mathbb{E}_{a\sim p}[C_i(F(a_i); a_{-i})] + \varepsilon$$

pro každého hráče $i \in P$ a každé modifikační pravidlo $F\colon A_i \to A_i$.

Exercise 4. *Nalezněte příklad s $N = 3$, ve kterém je externím regret nulový, ale swap regret je neomezený jako funkce T.*

Upřesnění: stačí pouze vybrat příslušnou posloupnost akcí $a^1, \dots, a^T$, $a^i \in X = \{1, 2, 3\}$ a posloupnost ztrát $\ell_a^1, \dots, \ell_a^T$ pro každé $a \in X$.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/