

# Algoritmická teorie her — 2. domácí úkol<sup>1</sup>

## Nashova ekvilibria

zadáno 31.10.2022, termín odevzdání 14.11.2022

Pokud chcete vidět své body na stránkách cvičení, tak si, prosím, zvolte přezdívku a napište ji spolu se svým jménem na svoje řešení či mi ji pošlete e-mailem.

**Příklad 1.** Dokažte, že následující lineární programy z důkazu Minimaxové věty jsou navzájem duální.

(a) Pro matici  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , [2]

	Program $P$	Program $D$
Proměnné	$y_1, \dots, y_n$	$x_0$
Účelová funkce	$\min x^\top M y$	$\max x_0$
Omezení	$\sum_{j=1}^n y_j = 1,$ $y_1, \dots, y_n \geq 0.$	$\mathbf{1}x_0 \leq M^\top x.$

(b) Pro matici  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , [2]

	Program $P'$	Program $D'$
Proměnné	$y_0, y_1, \dots, y_n$	$x_0, x_1, \dots, x_m$
Účelová funkce	$\min y_0$	$\max x_0$
Omezení	$\mathbf{1}y_0 - M y \geq \mathbf{0},$ $\sum_{j=1}^n y_j = 1,$ $y_1, \dots, y_n \geq 0.$	$\mathbf{1}x_0 - M^\top x \leq \mathbf{0},$ $\sum_{i=1}^m x_i = 1,$ $x_1, \dots, x_m \geq 0.$

Můžete použít kuchařku na vytváření duálních programů z přednášky.

**Příklad 2.** Použijte Lemkeho–Howsonův algoritmus a spočítejte Nashovo ekvilibrium následující hry dvou hráčů: [2]

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3. \end{pmatrix}$$

Výpočet začněte výběrem značky 1.

**Příklad 3.** [Spernerovo lemma] Nechť  $S$  je podrozdělení trojúhelníku  $T$  v rovině. Korektní obarvení vrcholů  $S$  přiřazuje jednu ze tří barev (modrá, červená a zelená) každému vrcholu z  $S$  tak, že všechny tři barvy jsou použité na vrcholech z  $T$ . Navíc každý vrchol z  $S$  ležící na hraně z  $T$  musí mít jednu z barev, kterou má nějaký vrchol této hrany ležící v  $T$ .

Dokažte, že v každém korektním obarvení  $S$  existuje trojúhelníková stěna v  $S$  jejíž vrcholy jsou obarveny všemi třemi barvami.

Hint: Použijte redukcí na problém END-OF-THE-LINE. [3]

<sup>1</sup>Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>