Algoritmická teorie her – příklady na 5. cvičení*

16. prosince 2020

1 Aukce maximalizující zisk

Uvažme *Bayesovský model*, který sestává z 1-parametrového prostředí (x, p) s n kupujícími, kde každý kupující i vybírá své ohodnocení v_i podle rozdělení pravděpodobnosti F_i s hustotou f_i a s doménou $[0, v_{max}]$. Rozdělení $F_1, \dots, F_n$ jsou nezávislá, ale ne nutně stejná. Připomínáme, že pro rozdělení F s hustotou f a s doménou $[0, v_{max}]$ platí $f(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z)$ a $F(x) = \int_0^x f(z)\,\mathrm{d}z$. Pro náhodnou veličinu X máme $\mathbb{E}_{z\sim F}[X(z)] = \int_0^{v_{max}} X(z) \cdot f(z)\,\mathrm{d}z$.

Virtuální ohodnocení kupujícího i s ohodnocením v_i vybraného podle F_i je $\varphi_i(v_i) = v_i - \frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$. *Virtuální sociální přebytek* je $\sum_{i=1}^n \varphi_i(v_i) \cdot x_i(v)$.

Vždy uvažujeme pouze DSIC aukce.

Příklad 1. *Nechť F je uniformní rozdělení pravděpodobnosti na $[0, 1]$. Uvažme 1-položkovou aukci se dvěma kupujícími 1 a 2, kteří mají rozdělení $F_1 = F$ a $F_2 = F$. Dokažte, že střední hodnota zisku obdrženého při Vickreyho aukci (bez rezervy) se rovná $1/3$.*

Příklad 2. *Spočítejte virtuální ohodnocení následujících rozdělení pravděpodobnosti a rozhodněte, která z nich jsou regulární.*

(a) *Uniformní rozdělení $F(z) = z/a$ na $[0, a]$ s $a > 0$,*

(b) *Exponenciální rozdělení $F(z) = 1 - e^{-\lambda z}$ s $\lambda > 0$ na $[0, \infty)$,*

Příklad 3. *Uvažme 1-položkovou aukci, ve které každý kupující i vybírá své ohodnocení podle regulárního rozdělení F_i, neboli rozdělení $F_1, \dots, F_n$ mohou být různá, ale virtuální ohodnocení $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ jsou všechna rostoucí.*

(a) *Nalzeněte vzoreček pro platbu výherce v optimální aukci vyjádřený pomocí virtuálních ohodnocení φ_i. Ověřte, že pro uniformní rozdělení $F_1 = \dots = F_n$ na $[0, 1]$ vzoreček dává Vickreyho aukci s rezervou $1/2$.*

(b) *Nalezněte příklad optimální aukce, ve které kupující s nejvyšší nabídkou nevyhraje, i když má kladné virtuální ohodnocení.*

Hint: Stačí uvážit dva kupující s ohodnoceními vybranými podle uniformních rozdělení.

Předpokládejme, že kupující $1, \dots, n$ jsou uspořádáni v takovém pořadí $<$, aby $\frac{b_1}{w_1} \geq \dots \geq \frac{b_n}{w_n}$. Uvažme *hladové alokační pravidlo* $x^G = (x_1^G, \dots, x_n^G) \in X$, ve kterém pro dané nabídky $b = (b_1, \dots, b_n)$ vybíráme podmnožinu kupujících splňující $\sum_{i=1}^n x_i^G w_i \leq W$ za použití následujícího postupu.

1. Vyber vítěze v pořadí $<$, dokud se vejdou a poté skonči.
2. Vrať buď řešení s prvního kroku anebo kupujícího s nejvyšší nabídkou, podle toho, co dává větší sociální přebytek.

Příklad 4. *Dokažte že v Batohové aukci je hladové alokační pravidlo x^G, které se používá v $(1/2)$-aproximačním algoritmu z přednášky, monotónní.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/˜balko/