Cvičení z matematické analýzy 1

Josef Amemori

duben 2020

Obsah

Předmluva

Tento text vzikl jako náhrada za zrušená cvičení z důvodu uzavření vysokých škol. Proto kapitoly na začátku jsou zkrácené, protože byly ještě probrány prezenčně na cvičení.

Cílem bylo vytvořit text, který by dal návod na myšlenkový pochod při řešení. Důraz je tedy kladen ne na počet příkladů, ale na hlubší rozbor metod řešení. Pro další příklady se podívejte do moodle, kde kolegové pravidelně vyvěšují nové příklady.

Uvedená řešní nejsou absolutní. Pokud dojdete k výsledku jinou korektní cestou, nemusíte se dogmaticky držet zde uvedených řešení.

Pokud při čtení narazíte na nějakou chybu, prosím neostýchejte se a napište mi na adresu amemori -at- kam.mff.cuni.cz.

Kapitola 1

Posloupnosti

Tato látka byla probrána na prezenčním cvičení.

1 Dokažte, zdali uvedené posloupnosti mají limitu. Pokud mají limitu, vypočtěte její hodnotu. Při řešení použijte pouze znalost defince limity a chování reálných čísel.

a) $\frac{1}{n}$

b) $(-1)^n$

2 Vypočtěte následující limity. Oproti předešlému příkladu už můžete používat věty dokázané na přednáškách.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2+7}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n}, a > 1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

3 Zjistěte, zdali níže uvedená rekurentní posloupnost má limitu. Pokud ano, vypočtěte její hodnotu.

$$a_1 = 10, a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}, n \in \mathbb{N}$$

Kapitola 2

Limity funkcí

Pří výpočtu limit se v textu bez důkazu používají následující limity.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \tag{2.1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln(a) \tag{2.2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \tag{2.3}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{2.4}$$

Znovu podotýkam, že tu platí stejné pravidlo jako u limity posloupností. Pokud nevím, zdali daný výraz má limitu, je potřeba její existenci dokázat, než začnu upravovat daný výraz. Viz následující příklad od pana profesora Picka a spol.[1]

Příklad 2.1. Určete, zdali existuje následující limita.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)\cdot x}{\sin(x)\cdot(x+1)}$$

Řešení. Mohlo by se zdát, že nejsnazší způsob řešení je vykrátit $\sin(x)$, čímž se získá $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+1}$, jejíž hodnotu lze dobře vypočítat. Bohužel tento způsob vede ke špatnému výsledku. Proč? Podívejme se na definici limity.

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 : x \in P(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in U(A,\epsilon)$$

Protože je v zájmu limita v nevlastním bodě, lze si definici přepsat do přehlednější formy.

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 : x > \delta \Rightarrow f(x) \in U(A,\epsilon)$$

Pokud by funkce měla limitu, musel by výraz $\frac{\sin(x)\cdot x}{\sin(x)\cdot(x+1)} \in U(A,\epsilon)$ dávat smysl pro $\forall x > \delta$. Bohužel $\forall x > 0\ \exists y > x : \sin(y) = 0$. Vždy lze tedy nalézt takové x, že ve jmenovateli vyjde nula, tzn. výsledný zlomek nedává smysl. □

Příklad 2.2. Určete, zdali existuje následující limita.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x}{x}$$

Řešení. Tato limita je velmi podobná limitě (2.2). Bohužel malá změna v čitateli způsobí, že limita neexistuje. U posloupností se k důkazu neexistenci limity používá věta o podposloupnostech. Zde se využije podobná věta dávající do vztahu limitu funkce a limitu posloupnosti, Heineho věta. Pro důkaz neexistence je pak potřeba nálezt dvě vybrané podposloupnosti konvergující k jiné hodnotě. (Prakticky se hledají dvě dvojice posloupností.)

Za první posloupnost se vybere

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n=0}^{\infty} \text{ reprezentující } x \to 0 \text{ a } \left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}\right)_{n=0}^{\infty} \text{ reprezentující } \lim_{x\to 0} \frac{2^x}{x}$$

Limita druhé posloupnosti pak vychází

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} n$$

Limitu vlevo umíme vypočítat, např. použitím věty o dvou policajtech spolu se znalostí, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Použitím aritmetiky limity posloupností na celý výraz vyjde, že je roven ∞.

Druhou posloupnost si vybereme podobnou té první. Pouze místo $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=0}^{\infty}$ se vybere $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n=0}^{\infty}$. Použitím stejného postupu jako u první posloupnosti vyjde, že limita se rovná $-\infty$.

Vyšlo, že zde existují dvě vybrané posloupnosti mající různé limity, tzn. z Heineho věty plyne, že limita neexistuje. □

Příklad 2.3. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}.[1]$$

Řešení. Na tomto příkladu si ukážeme použití věty o aritmetice limit. Při použití věty je potřeba dávat si pozor, aby byly splněny potřebné podmínky, tzn. aby výsledný výraz získaný aplikací věty dával smysl. Pokud by se bez úprav použila aritmetika, dostane se výraz

$$\frac{\lim\limits_{x\to 1} x^{100} - \lim\limits_{x\to 1} 2x + \lim\limits_{x\to 1} 1}{\lim\limits_{x\to 1} x^{50} - \lim\limits_{x\to 1} 2x + \lim\limits_{x\to 1} 1} = \frac{1-2+1}{1-2+1} = \frac{0}{0} \quad \dagger$$

Je tedy třeba upravit výraz, např. vykrácením, aby se předešlo situaci, kdy ve jmenovateli vyjde 0. V tomto případě je dobrým kandidátem vzorec

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$$

Využitím vzorce je pak samotné řešení přímočaré.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x^{100} - x) - (x-1)}{(x^{50} - x) - (x-1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x(x^{98} + x^{97} + \ldots + x + 1) - 1)}{(x-1)(x(x^{48} + x^{47} + \ldots + x + 1) - 1)} \\
&= \frac{99-1}{49-1}
\end{aligned}$$

□

Věta o aritmetice limit má tu hezkou vlastnost, že zachovává spojitost. To se hodí například při použití věty o limitě složných funkcí, kdy při spojitosti vnější funkce lze větu použít.

Příklad 2.4. Najděte body nespojistosti následující funkce a určete charakter těchto nespojitostí.

$$y = \frac{x}{\sin(x)}$$

Řešení. Nejprve se určí definiční obor. Tato funkce není definována, pokud jmenovatel se rovná 0, což nastává v případech kdy $x = 2k\pi, k \in \mathbb{N}$, tzn. v těchto bodech není funkce spojitá.

Pro určení chování v ostatních bodech se využije věta o aritmetice spojitých funkcí, jejímž použitím se zjistí body, ve kterých je funkce spojitá. V tomto případě je tu podíl. Tedy ptáme se na otázku, kdy má následující rovnice smysl.

$$\lim_{x\to a} \frac{x}{\sin(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} x}{\lim\limits_{x\to a} \sin(x)}$$

Z podmínek věty vyplývá, že rovnice má smysl, pokud je výraz na pravé straně definován. Protože $\lim_{x\to a} x = a$ a $\lim_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)$, nejdou do nekonečna, výraz na pravé straně dává smysl, pokud není jmenovatel rovný nule, což nastává v případech, kdy $a = 2k\pi, k \in \mathbb{N}$, což jsou přesně i body, ve kterých funkce není definována, tedy i funkce není spojitá. Máme tedy určeny body nespojitosti, jejichž charakter je potřeba vyšetřit.

Pro $a = 0$ se použije vzorec (2.1).

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

Vychází, že funkce má v bodě 1 odstranitelný bod nespojitosti.[1]

Mějme $a = 2\pi$, tnz. $\lim_{x\to 2\pi} \frac{x}{\sin(x)}$. Intuitivně jde hodnota v čitateli ke kladnému číslu a výraz ve jmenovateli jde k nule zleva a zprava, tzn. k nule se blížím kladnými a zápornými hodnotami. To vede k hypotéze, že limita neexistuje. Pro důkaz neexistence je pak k dispozici Heineho věta.

Pro důkaz si vyberme posloupnost

$$\left(2\pi + \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

Po dosazení do funkce se dostane

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\pi + \frac{1}{n}}{\sin(2\pi + \frac{1}{n})} = 2\pi \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sin(\frac{1}{n})} + \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\sin(\frac{1}{n})} = 2\pi \cdot \infty + 1 = \infty$$

U první rovnosti se použila aritmetika limity. Protže výraz, jenž vyšel, dává smysl, bylo použití věty korektní. U druhé rovnice se pro zjištění hodnoty v pravém sčítanci použil vzorec (2.1) spolu s Heineho větou.

Za druhou posloupnost se vybere

$$\left(2\pi - \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

Výpočet probíhá stejně. Pouze ve výsledku vyjde hodnota s opačným znaménkem. Výše napsaný výpočet lze aplikovat na libovolnou hodnotu a. Dá-li se to celé dohromady, vychází, že v $a = 2k\pi, a \in \mathbb{N} \wedge a \neq 0$ má funkce body nekonečné spojitosti. [2]

Kdybychom chtěli mít řešení, které je stroprocentní, bylo by potřeba dokázat, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sin(\frac{1}{n})} = \infty$*. Protože se Vám funkce* $sin(x)$ *definovala jako součin nekonečné řady a nekonečné řady se na přednášce skoro nedělaly, důkaz se zde vynechá.* □

[1] Bod nespojitosti, ve kterém se limity zleva i zprava rovnají

[2] Bod nespojitosti, ve kterém je jedna z limit zprava nebo zleva nevlastní.

Příklad 2.5. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}.[1]$$

Řešení. V tomto příkladu se podíváme na použítí věty o limitě složené funkce. Vzpomenete-li si na příklad 2.d na straně 3, museli jsme při řešení tohoto příkladu používat větu o dvou policajtech, protože jsme neměli k dispozici větu o limitě složené funkce. Zde už ji máme, což usnadní výpočet. Předtím je však potřeba zjistit, zdali jsou splněny předpoklady. U tohoto příkladu je vnější funkce odmocnina, která je spojitá na kladných číslech. Větu lze tedy použít. Pořád nás to však nezbaví situace, kdy nám vyjde ∞ jak v čitateli, tak ve jmenovateli, pokud by se použila věta o složené funkci bez dalších úprav. Aby se předešlo zmíněné situaci, použije se stejná technika jako v příkladu 2.a na straně 3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\end{aligned}$$

Protože $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, vyjde

$$\lim_{x\to infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = 1$$

□

Příklad 2.6. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$$

Řešení. Máme tu neznámou složitě vypadající limitu. Věta o aritmetice ani věta o složené funkci nelze přímo použít. Nezbývá, než se vrátit k základní otázce při řešení úloh. Nepodobá se to něčemu, co už jsem viděl? V tomto případě je to výraz, kde proměnná x se nachází jak v základu mocniny, tak i v exponentu, a celý exponent pak roste donekonečna. Tato pozorování vedou k limitě (2.4). V čem se liší?

Jak čitatel, tak i jmenovatel jde do nekonečna, kdežto u (2.4) jde k 1, tzn. liší se v základu mocniny. Toho se lze zbavit vytknutím $\frac{1}{x^2}$. Nakonec je potřeba dořešit nerovnost hodnot, ve kterých se zkoumají limity. Bylo by potřeba, aby limita z příkladu šla k 0. Na to se využije věta o limitě složené funkce. V exponentu je x^2 a aby se podobal exponentu v limitě (2.4), kde je výraz $\frac{1}{y}$, udělá se substituce $x^2 = \frac{1}{y}$. Jak to pak celé navléknout na větu o limitě složené funkce?

Věta o limitě složené funkce zkráceně říká, že pokud $\lim_{x\to A} f(x) = B$, $\lim_{x\to c} g(x) = A$, pak $\lim_{x\to c} f(g(x)) = B$, tzn. věta se používá pro získání limity funkce $f(g(x))$ z limity funkce $f(y)$. Tedy limitu z příkladu je potřeba rozložit na $f(y)$ a $g(x)$. Tato část je však už vyřešena volbou substituce, kde $g(x) = \frac{1}{x^2}$ a $f(y) = \left(\frac{\frac{1}{y}+1}{\frac{1}{y}-2}\right)^{\frac{1}{y}}$. Před použitím věty o limitě složené funkce je nakonec potřeba zjistit platnost podmínek. V tomto případě je splněna podmínka, že $g(x)$ nenabývá hodnoty 0. Jediné, co zbývá, je vyřešit limitu $f(y)$.

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 0}\left(\frac{\frac{1}{y}+1}{\frac{1}{y}-2}\right)^{\frac{1}{y}} &= \lim_{y\to 0}\left(\frac{\frac{1}{y}(1+y)}{\frac{1}{y}(1-2y)}\right)^{\frac{1}{y}} \\ &= \frac{e}{e^{-2}} \\ &= e^3 \end{aligned} \tag{2.5}$$

□

Příklad 2.7. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

Řešení. Na tomto příkladu si ilustrujme použití metody převodu exponentu, tj. $a = e^{ln(a)}$, $a > 0$, což se používá ke zbavení se nepříjemných exponentů, protože $\ln(a^b) = b\cdot\ln(a)$. Tato technika se používá například v situaci, kdy je výraz v limitě tvaru $f(x)^{g(x)}$ a není vidět, jak na to navléknout limitu (2.4). V tomto případě se zlogaritmováním v exponentu e získá

$$\begin{aligned} \frac{\ln\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)}{x^2} &= \frac{\ln(1+x2^x)-\ln(1+x3^x)}{x^2} \\ &= \frac{\ln(1+x2^x)}{x^2} - \frac{\ln(1+x3^x)}{x^2} \end{aligned}$$

Proč se to upravilo do tohoto tvaru? Aby se celý výraz přiblížil limitě (2.3). Jediné, co je potřeba dodělat je, aby se ve jmenovateli nacházeli stejné pravé sčítance z logaritmů. Rozšířením zlomků dostaneme

$$\frac{\ln(1+x2^x)}{x2^x}\cdot\frac{2^x}{x}-\frac{\ln(1+x3^x)}{x3^x}\cdot\frac{3^x}{x}$$

Aritmetiku limity však ještě nemůžeme použít, protože

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x}{x}$$

neexistuje, viz příklad 2.2. Existovala by, pokud by měla tvar (2.2). Je tedy třeba mít v čitateli 2^x-1 a 3^x-1. Rozšíří-li se celý zlomek požadovaným výrazem, vznikne

$$\frac{\ln(1+x2^x)}{x2^x}\cdot\frac{2^x-1}{x}\cdot\frac{2^x}{2^x-1}-\frac{\ln(1+x3^x)}{x3^x}\cdot\frac{3^x}{x}\cdot\frac{3^x}{3^x-1}$$

Tím jsme si však moc nepomohli. Místo $\lim_{x\to 0}\frac{2^x}{x}$ tu je $\lim_{x\to 0}\frac{2^x}{2^x-1}$. Podobná situace.

V tomto případě se musí rozšiřovat trochu jinak. Při pozornějším pohledu je vidět, že tu je rozdíl, kde menšenec i menšitel jsou si velmi podobní. Toho se dá využít způsobem, že při rozšiřování lze něco přidat (nebo odebrat) k menšenci a tu samou hodnotu odečíst (přičíst) k menšiteli. Co přičítat, nebo odečítat? Bohužel v tomto bodě nezbývá než zkoušet. Je však dobré myslet na několik věcí. Na logaritmus se použije limita (2.3). Uvnitř logoritmu tedy vždy musí být výraz tvaru $1+f(x)$, kde $\lim_{x\to 0}f(x)=0$ a jenž se následně musí vložit i do jmenovatele. U tohoto příkladu $f(x)$ obsáhne $x2^x$, na nějž je pak potřeba napasírovat limitu (2.2). To, co zbyde, musí jít také dobře spočítat. Jedna možnost je přičíst $\ln(x-1)/x^2$ k menšenci.

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x2^x)+\ln(1-x)}{x^2}&=\frac{\ln((1+x2^x)\cdot(1-x))}{x^2}\\&=\frac{\ln(1+x(2^x-1-x2^x))}{x^2}\cdot\frac{2^x-1-x2^x}{2^x-1-x2^x}\\&=\frac{\ln(1+x(2^x-1-x2^x))}{x(2^x-1-x2^x)}\cdot\left(\frac{2^x-1}{x}-\frac{x2^x}{x}\right)\end{aligned}$$

Když se dá výraz do limity za použití aritmetiky limity a věty o složené funkci, dostane se

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x(2^x-1-x2^x))}{x(2^x-1-x2^x)}\cdot\left(\frac{2^x-1}{x}-\frac{x2^x}{x}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x(2^x-1-x2^x))}{x(2^x-1-x2^x)}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{x2^x}{x}\right)\\&=1\cdot(\ln(2)-1)\end{aligned}$$

Dá-li se to celé dohromadu spolu s výpočtem menšitele, jehož výpočet je stejný, pouze se liší v číslech, a věty o složené funkci, vyjde

$$e^{(\ln(2)-1)-(\ln(3)-1)} = e^{ln(2)-ln(3)} = \frac{2}{3}$$

$\square$

Výše popsaný výpočet se dá použít k ukázání souvislosti mezi (2.3) *a* (2.4)*. Z toho pak plyne, že použití vzorce* (2.4) *je speciální případ použití metody převodu exponentu s následným použitím* (2.3)*.*

Kapitola 3

Derivace

3.1 Základní metody

V příloze A jsou vypsány derivace základních funkcí.

Příklad 3.1. Z definice vypočtěte derivace následující funkce. $\sqrt{x}$

Řešení. Protože se požaduje výpočet z definice, funkce ze zadání se musí dosadit do definice a získanou limitu vypočítat.

$$\lim_{x \to b} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{b}}{x - b}$$

Celá limita dává smysl pro hodnoty $b > 0$. Hodnotu $b = 0$ nezahrnujeme do výpočtu, protože zkoumaná limita je oboustranná, tzn. v případě, že $b = 0$, x by se blížil k 0 i zleva. Pak by však výraz $\sqrt{x}$ přestával dávat smysl.

Protože výraz ve jmenovateli jde k 0, nelze hned použít aritmetiku limit. Je potřeba ho upravit. Lze pozorovat, že výrazy v čitateli a ve jmenovali se liší pouze odmocninou u menšence a menšitele. Pokud bychom dokázali menšence i menšitele v čitateli umocnin dvěma, mohl by se výsledný výraz vykrátit s výrazem ve jmenovatli. Toho se dá docílit použitím vzorce pro $a^2 - b^2$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to b} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{b}}{x - b} &= \lim_{x \to b} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{b}}{x - b} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{b}}{\sqrt{x} + \sqrt{b}} \\
&= \lim_{x \to b} \frac{x - b}{x - b} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{b}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{b}}
\end{aligned}$$

Vyšlo, že na intervalu $(0, \infty)$ má funkce derivaci, jejíž hodnoty jsou dány funkcí $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. A co derivace v bodě 0? Z nazačátku napsaného důvodu je potřeba počítat s jednoustrannou derivací. Výpočet se od výše napsaného liší pouze v části $x \to 0^+$. Po dosazení pak vyjde, že derivace je ∞, neboli v bodě 0 je tečna svislá. $\square$

Při řešení úloh nezapomínejte na určení hodnot, kde je derivace definována.

Příklad 3.2. Zderivujte následující funkci bez použití vzorce pro danou funkci.

$$x^a, \ a \in \mathbb{R}$$

Řešení. V této situaci máme funkci s mocnitelem, kterou nelze přímo zderivovat, protože to zadání zakazuje a jiný vzorec na ní nelze použít. V tomto případě nejvíce vadí exponent. Proto se zde použije klasická technika na zbavení se exponentu, technika převodu do exponentu.

$$(x^a)' = \left(e^{\ln(x^a)}\right)' = \left(e^{a\ln(x)}\right)' = e^{a\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} \cdot a = ax^{a-1}$$

Při počítání se použila věta o derivaci složené funkce, předpoklady jsou splněny pro $x > 0$, spolu se vzorci A.4, A.6.

Vyšlo, že funkce $x^a, \ a \in \mathbb{R}$ má derivici rovnou ax^{a-1}, pro $x > 0$. $\square$

Příklad 3.3. Zderivujte následující funkci.

$$y = \frac{1}{2}\arctan\left(\sqrt[4]{1+x^4}\right) + \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}$$

Řešení. Výraz vypadá nepříjemně, ale narozdíl od limit je derivování přímočaré. Stačí mechanicky používat věty o aritmetice derivací a o derivaci složené funkce. Pouze je potřeba si dávat pozor, aby byly splněny potřebné předpoklady.

Jako u všech příkladů, kde se zkoumá funkce, se nejprve zjistí její definiční obor. V tomto případě je funkce definována všude kromě 0. Protože všechny elementární funkce, které se v zadání vyskytují, jsou diferenciovatelné ve všech vnitřních bodech, ve kterých jsou definovány, bez problému lze používat jak větu o aritmetice derivací, tak větu o derivaci složené funkce.

Ačkoliv je derivování přímočaré, je vhodné se před začátkem zamyslet a zvolit postup, který bude nejméně pracný. V tomto příkladu si lze všimnout, že se tu opakuje výraz $\sqrt[4]{1+x^4}$. Pokud se ve funkci opakují identické složité výrazy, je výhodné je zasubstituovat za promměnou, $z = \sqrt[4]{1+x^4}$. Za prvé to ušetří psaní a za druhé se to může v průběhu výpočtu vykrátit. Pouze je potřeba mít na mysli, že se pořád derivuje podle x, tzn. u výrazů obsahujících nově substituovanou proměnnou je potřeba použít větu o derivaci složené funkce. Protože reálně je z funkce v proměnné x, pro lepší přehlednost se pro z použije značení $z(x)$ a její derivace se označí $z(x)'$.

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}\arctan(z(x)) + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{z(x)+1}{z(x)-1}\right)\right)' \\
&= \left(\frac{1}{2}\arctan(z(x)) + \frac{1}{4}\ln(z(x)+1) - \frac{1}{4}\ln(z(x)-1)\right)' \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{z(x)^2+1}z(x)' + \frac{1}{4}\frac{1}{z(x)+1}z(x)' - \frac{1}{4}\frac{1}{z(x)-1}z(x)' \\
&= \frac{z(x)'}{4}\left(\frac{2}{z^2+1} + \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1}\right) \\
&= \frac{-z(x)'}{z^4-1}
\end{aligned}
$$

Před tím, než se provede zpětná substituce, je potřeba dopočítat derivaci $z(x)$.

$$z(x)' = \frac{1}{4\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}4x^3$$

Po zpětném dosazení vyjde

$$-\frac{1}{x\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

□

Příklad 3.4. Najděte derivace následující funkce.

$$y = |\sin^3(x)|$$

Řešení. Absolutní hodnotu nelze přímo derivovat. Proto je potřeba se ji před derivováním zbavit.

$$y = \begin{cases} \sin^3(x) & \text{pro } x \in [2k\pi, (2k+1)\pi], \ k \in \mathbb{Z}, \\ -\sin^3(x) & \text{pro } x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi], \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Pro počítání derivace se vezmou otevřené intervaly, protože v koncových bodech se počítají jednostranné derivace, které se většinou počítají použitím věty o spojitosti derivace v krajních bodech.

$$y' = \begin{cases} 3\sin^2(x)\cos(x) & \text{pro } x \in [2k\pi, (2k+1)\pi],\ \ k \in \mathbb{Z}, \\ -3\sin^2(x)\cos(x) & \text{pro } x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi],\ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Nyní je potřeba vyřešit derivace v bodech $2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$. Protože funkce je spojitá, lze pro zkoumání jednostranných derivací použít větu o spojitosti derivace v krajním bodě. Zbývá pouze zjistit, zdali se příslušné jednostranné limity rovnají.

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 2k\pi^-} 3\sin^2(x)\cos(x) = 3 \cdot 0 \cdot 1 = 0 \qquad && k \in \mathbb{Z} \\ &\lim_{x \to 2k\pi^+} -3\sin^2(x)\cos(x) = -3 \cdot 0 \cdot 1 = 0 && k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Potřené předpoklay věty jsou splněny. Proto funkce má derivace v bodech $2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$. Obdobně pro body $(2k+1)\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$. Dá-li se to celé dohromady, vychází, že funkce je v každém bodě diferenciovatelná a derivace se rovná

$$\frac{3}{2}\sin(2x)|\sin(x)|.$$

□

Příklad 3.5. Najděte derivace následující funkce.

$$y = \begin{cases} x & \text{pro } x < 0, \\ \ln(1+x) & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$

Řešení. Jako v příkladu 3.4 nejprve se určí derivace ve vnitřních bodech intervalů. Použitím vzorečků vychází, že

$$y' = \begin{cases} 1 & \text{pro } x < 0, \\ \frac{1}{1+x} & \text{pro } x > 0 \end{cases}$$

Aby se mohla použít věta o spojitosti derivace v krajním bodě, je potřeba určit spojitost v bodě 0.

$$\lim_{x \to 0^-} x = 0 = \ln(1) = \lim_{x \to 0^+} \ln(1+x)$$

Protože vyšlo, že funkce je spojitá v bodě 0. Lze použít větu o spojitosti derivace v krajním bodě. Nakonec zbývá porovant příslušné jednostranné derivace v bodě 0.

$$y'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1 = \frac{1}{1+0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1+x} = y'_+(0)$$

Vychází, že jednostranné derivace se rovnají. Proto je funkce na celém intervalu diferenciovatelná a derivace je dána jako

$$y' = \begin{cases} 1 & \text{pro } x < 0, \\ \frac{1}{1+x} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$

□

3.2 Aplikace Derivace

Příklad 3.6. Nakreslete graf následující funkce.

$$\frac{e^x}{1+x}$$

Řešení. Dostali jsme se k jedné ze základních otázek matematiky. Když máme funkci, jak se chová? Vždy se snažíme o funkci říct co nejvíce, což pomůže v následném kreslení jejího grafu.

I. Určení definičního oboru funkce.

   Definiční obor určí pracovní prostor.

   Zkoumaná funkce je ve tvaru zlomku. V čitateli je exponenciální funkce definovaná na všech reálných číslech, tzn. jediné omezení může nastat ve jmenovali, který se nesmí rovnat nule.

$$x + 1 \neq 0$$

   Vyřešením rovnice vyjde, že definiční obor funkce je $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

II. Prozkoumání symetrie a periody funkce.

   Pokud funkce splňuje jednu z vlastností, sníží se množství práce. Například při sudosti funkce se stačí omezit na nezápornou x-ovou osu. U symetrie se určuje sudost, $f(x) = f(-x)$, a lichost, $f(-x) = -f(x)$. Perioda je určena existencí $p \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) = f(x + p)$.

   Protože zkoumaná funkce má nesymetrický definiční obor, jehož nedefinované body jsou neperiodické, funkce není symetrická ani periodická.

III. Určení bodů křížení s osamy x a y, a intervalů s konstantním znaménkem.

Protože graf funkce se kreslí se souřadnicovou osou, je potřeba určit, kde osu kříží. Zajímá nás křížení s x-ovou a y-ovou osou. Křížení s x-ovou osou dá i odpověď na intervaly, kde je funkce kladná a záporná.

Křížení s x-ovou osou.

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{1+x} &\stackrel{?}{=} 0 \\ e^x &\stackrel{?}{=} 0 \end{aligned}$$

Protože exponenciální funkce je vždy kladná, zadaná funkce nekříží osu x.

Křížení s y-ovou osou.

$$\frac{e^0}{1+0} = e^0 = 1$$

Funkce kříží osu y v bodě 1.

Protože funkce nikde nekříží osu y, uvnitř intervalů $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$ zůstávají znaménka hodnot stejná. Pouze mezi hodnoty z různých intervalů může být znaménko odlišné. V bodě 0 nabývá funkce kladné hodnoty 1, proto je funkce na intervalu $(-1, \infty)$ kladná. Z intervalu $(-\infty, -1)$ se vybere například hodnota -2. Dosazením do funkce vyjde záporná hodnota, tzn. na tomto intervalu je funkce záporná.

IV. Vyšetření bodů spojitosti a nespojitosti.

Pro určení oblastí spojitosti se použijí věty o aritmetice spojitých funkcí a o spojitosti složených funkcí, příslušných jednostranných variant.

U bodů nespojitosti se zkoumá, zdali jednostrané limity v daném bodě existují a zdali jsou vlastní nebo ne.

Funkce ze zadání má jak v čitateli, tak ve jmenovali funkce, které jsou spojité na celém definičním oboru. Použitím věty o aritmetice spojitých funkcí vyjde, že funkce je spojitá všude kromě -1, což je také jediný bod nespojitosti, u kterého se prozkoumají jednostranné limity.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1^-} \frac{e^x}{1+x} &= \lim_{x \to -1^-} e^x \cdot \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{1+x} \\ &= e^{-1} \cdot -\infty \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -1^+} \frac{e^x}{1+x} &= \lim_{x\to -1^+} e^x \cdot \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{1+x} \\
&= e^1 \cdot \infty \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

Vychází, že bod -1 je bodem nekonečné nespojitosti.

V. Vyšetření chování funkce v koncových bodech.

Zkoumání bodů nespojitosti dalo odpověď na limitní chování funkce ve zmíněných bodech. Poslední body, které zbývají z tohoto pohledu prozkoumat, jsou krajní body, tzn. jak se funkce limitně chová v nekonečnu. Otázka, která nás zajímá je, zdali se funkce neblíží k nějaké asymptotě, což je přímka. Například exponenciální funkce e^x se blíží k 0, jdou-li hodnoty do $-\infty$, tzn. přímka $y = 0$ je vodorovnou asymptotou funkce e^x v mínus nekonečnu.

Když se podíváte na bod, kde se zkoumala spojitost, bod nekonečné nespojitosti představuje místo, kde se funkce blíží ke svislé asymptotě, tj. případ, kdy je přímka kolmá k ose x.

Pokud se funkce blíží k $y = ax + b$, tzv. šikmá asymptota, v ∞, pak si přejeme, aby jejich rozdíl šel k 0 s rostoucí hodnoutou x, tzn. funkce má asymptotu $y = ax + b$ v nekonečnu, pokud $\lim_{x\to\infty} f(x) - (ax + b) = 0$. Z této limity se pak odvodí vzorce pro a a b.

$$
a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax)
$$

Obdobně pro asymptotu v $-\infty$. V případě vodorovných asymptot lze počítat přímo $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Pokud vychází, že funkce má vlastní limitu v ∞ rovnou a, pak funkce má v nekonečnu vodorovnou asymptotu $y = a$.

U funkce ze zadání je situace v mínus nekonečnu

$$
\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x+1} = \lim_{x\to -\infty} e^x \cdot \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \cdot 0 = 0
$$

U ∞ vychází, že funkce nemá vlastní limitu, tzn. je potřeba prozkoumat možnost existence šikmé asymptoty.

$$
\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x + x^2}
$$

Použitím $\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n}$, $a \geq 1$, jehož výpočet je podobný jako u příkladu 2.b na straně 3, a Heineho věty vychází, že zkoumaná limita není vlastní.

Vychází, že funkce nemá asymptotu v nekonečnu, ale má vodorovnou asymptotu $y = 0$ v mínus nekonečnu.

VI. Určení monotonie a lokálních a globálních extrémů.

Pro určení lokálních extrémů se použije věta o lokálních extrémech, která dává nutnou podmínku pro existenci extrému. Díky tomu se určí, kde by se mohly nacházet lokální extrémy. Kandidáti jsou body, kde není derivace definována, nebo je derivace rovná nule. Pro urční, zdali je to minimum, nebo maximum se dá použít výpočet druhé derivace. Je však výhodnější určit, jak se funkce chová v okolí zkoumaného bodu, které je dostatečné malé, aby byla funkce na levém a pravém okolí monotóní. Pokud je funkce na levém okolí rostoucí a na pravém okolí klesající, pak v příslušném bodě je lokální maximum. A obdobně pro minimum.

Popsaná metoda je výhodnější než počítat druhou derivaci, protože ji lze použít i na body, kde není derivace definována. A intervaly monotonie je tak jako tak potřeba určit použitím věty o derivaci a monotonii.

Pro zjištění lokálních extrémů a intervalů monotonie funkce ze zadání se nejprve vypočítá její derivace pro získání kandidátů.

$$\left(\frac{e^x}{x+1}\right)' = \frac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2} = \frac{e^x x}{(1+x)^2}$$

Derivace není definována v -1. Protože i samotná funkce není v daném bodě definována, není -1 kandidátem pro lokální extrém.

Jmenovatel je vždy kladný, tzn. jedině čitatel může ovlivnit znaménko. Exponenciální funkce je vždy kladná. Tedy vychází, že znaménko celého výrazu je určeno chováním funkce x. Stejnou úvahou se dají získat body, kde se derivace rovná 0.

Vychází, že funkce má na intervalu $(-\infty, 0)$ zápornou derivace, tzn. funkce je na daném intervalu klesající, a na intervalu $(0, \infty)$ má derivaci kladnou, tzn. funkce je na intervalu rostoucí. Jediným kandidátem pro lokální extrém je bod 0. Protože bod má takové okolí, že nalevo od bodu má funkce zápornou derivaci a napravo od bodu kladnou derivaci, má funkce v bodě 0 lokální minimum.

Je dané lokální minimum globální? Nemůže být, protože z už provedené analýzy víme, že funkce jde v bodě -1 zleva do mínus nekonečna.

V případě funkce ze zadání tento bod končí, ale pokud by to byla funkce, která by byla definována na $[a, b]$, pak by se ještě mohla vypočítat jednostranná derivace v bodě a a b. Pokud by existovala, daná derivace by určovala jak "prudce" z daného bodu funkce vychází. Použije se zde sejná logika jako u oboustranných derivací, jejichž hodnota určuje směrnice tečny, neboli velikost změny.

VII. Určení inflexních bodů a intervalů konvexnosti a konkávnosti grafu funkce.

Z prozatím získaných informací lze už získat dobrou představu o průběhu funkce. Pořád však nelze nic říct o tvaru křivky. K tomu se využívají pojmy konvexnost a konkávnost grafu, jež se určují za použití věty o konvexity, konvektivity a druhé derivace.

V případě funkce ze zadání

$$\left(\frac{e^x}{x+1}\right)'' = \left(\frac{e^x x}{(1+x)^2}\right)' = \frac{e^x(x^2+1)}{(1+x)^3}$$

Druhá derivace není definovaná pouze v bodě -1, což je sejný bod, ve kterém není definována funkce. Čitatel druhé derivace je vždy kladný, tzn. pouze jmenovatel může ovlivnit znaménko. V tomto případě je ve jmenovateli funkce $(1 + x)^3$, tzn. na intervalu $(-\infty, -1)$ je druhá derivace záporná, neboli funkce je na daném intervalu konkávní. Na intervalu $(-1, \infty)$ je druhá derivace kladná, tzn. funkce je na intervalu konvexní.

Funkce nemá inflexní bod, protože jediný kandidát, bod -1, je lokální minimum.

$\square$

Počítáním druhé derivace se získala přesnější informace o chování funkce, v případě druhé derivace konvexnost a konkávnost. Vypočítáním vyšších derivací se pak dají získat další upřesňující informace o chování funkce. Tento princip se pak používá u Taylorových polynomů, kde se počítají derivace všech řádů.

Příklad 3.7. Vypočtěte následující limitu.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

Řešení. Funkce je ve tvaru, kdy jak v základu mocniny, tak i v exponentu jsou výrazy, které jdou 0. Proto se použije metoda převodu do exponentu. Protože základ mocniny je vždy kladný, je převod ekvivalentní úpravou.

$$\lim_{x\to 0} e^{\ln\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}}$$

Funkce e^2 je spojitá funkce. Proto díky větě o limitě složené funkce stačí soustředit pozornost na exponent.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)}{x^2}$$

Vznikl zlomek, kde jak čitatel, tak i jmenovatel mají limitu rovnou 0. Máme zde situaci pro použítí l'Hospitalovo pravidla. L'Hospitalovo pravidlo se používá při situacích jaka $0\cdot\infty$, 0^0, $\infty-\infty$ atd., které se převedou na dva základní typy $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ [2] z l'Hospitalova pravidla. Při používání pravidla je potřeba mít na paměti, že se musí ukázat platnost všech předpokladů. V tomot případě jak čitatel, tak i jmenovael mají vlastní derivaci na otevřeném okolí 0 a derivace jmenovatele na stejném okolí nenabývá 0.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)}{x^2} &\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\frac{\tan(x)}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}\cdot x - \tan(x)}{x^2}}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin(2x)}{2x^2 \sin(2x)} \\
&\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2 - \cos(2x)\cdot 2}{2\cdot 2x \cdot \sin(2x) + 2x^2 \cdot \cos(2x)\cdot 2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{2x\sin(2x) + 2x^2\cos(2x)} \\
&\overset{\text{l'Hospita}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)\cdot 2}{2\cdot\sin(2x) + 2x\cdot\cos(2x)\cdot 2 + 4x\cdot\cos(2x) + 2x^2\cdot(-\sin(2x))\cdot 2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{4x\cos(2x) + \sin(2x)(1-2x^2)} \\
&\overset{\text{l'Hospital}}{=} \frac{\cos(2x)\cdot 2}{4\cdot\cos(2x) + 4x\cdot(-\sin(2x))\cdot 2 + \cos(2x)\cdot 2\cdot(1-2x^2) + \sin(2x)\cdot(-4x)} \\
&\overset{\text{l'Hospital}}{=} \frac{\cos(2\cdot 0)\cdot 2}{4\cdot\cos(2\cdot 0) + 4\cdot 0\cdot(-\sin(2\cdot 0))\cdot 2 + \cos(2\cdot 0)\cdot 2\cdot(1-2\cdot 0^2) + \sin(2\cdot 0)\cdot(-4\cdot 0)} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Každé použití l'Hospitalovy věty bylo korektní, protože součet a součin diferenciovatelných funkcí je diferenciovatelný a všechny derivace jmenovatele mají otevřené okolí bodu 0 tak, že na něm nenabývá hodnoty 0.

Po zpětném dosazení do exponentu limita vychází

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}}$$

$\square$

Kapitola 4

Integrály

4.1 Neurčitý integrál

Příklad 4.1. Vypočtěte následující integrál.

$$\int (3-x^2)^3 + \frac{x^2}{1+x^2} + \tan^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Řešení. Integrování se od derivování liší v jedné důležité části. Neexistuje algoritmus, podle kterého by se dal vyřešit libovolný integrál. Při integrování hraje důležitou roli zkušenost a znalost různých postupů.

Na tomto příkladu si ilustrujme jednu ze základních technik, na kterou se zapomíná. Metoda rozkladu. Principem je, pokud $f(x) = \sum_{i=0} n f_i(x)$, pak $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0} n \int f_i(x)\,\mathrm{d}x$. Cílem je převést integrovanou funkci $f(x)$ na součet funkcí $f_i(x)$, které lze vyřešit pomocí tabulkových integrálů, nebo jiných známých metod. Je potřeba zdůraznit, že se vytváří součet a ne součin, protože integrál zachovává pouze sčítání a násobení konstantou, ale ne součin dvou funkcí.

Pro převod se využívají algebraické, nebo trigonometrické vzorce. Minimálně je vhodné znát vzorce pro $(a+b)^n$ a $a^n - b^n$. Při integrování pomocí tabulkových intagrálů musí platit, že integrovaný výraz je ve stejném tvaru jako výraz ve vzorci. I malá změna může dát kompletně jiný výsledek, např. $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d} = \arctan(x) + c$ a $\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$.

U integrálu ze zadání se první sčítanec rozloží na součet mocnin. Druhý sčítance je zlomek, který je potřeba upravit na tabulkový integrál. V tomto případě je dobrým kandidátem $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. U posledního výrazu se zkusí použít trigonometrické funkce a převést ho na jeden z tabulkových integrálů pro trigonometrické funkce.

$$
\begin{aligned}
&\int (3-x^2)^3 + \frac{x^2}{1+x^2} + \tan^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int (3-x^2)^3\,\mathrm{d}x + \int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int \tan^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int 27 - 27x^2 + 3x^4 + x^6\,\mathrm{d}x + \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\sin(x)^2 - 1 + 1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int 27\,\mathrm{d}x - \int 27x^2\,\mathrm{d}x + \int 3x^4\,\mathrm{d}x + \int x^6\,\mathrm{d}x + \int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \int 1\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= 27x - 9x^3 + \frac{9x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + x - \arctan(x) - x + \tan(x) + c
\end{aligned}
$$

Po zintegrování se nesmí zapomenout na přidání konstanty c. Důvodem je, že se tu provádí opačný směr než u derivování, kde derivace udávala velikost změny. Při integrování je předložena funkce reprezentující velikost změny a úkolem je získat funkci mající derivaci odpovídající zadané funkce. Bohužel funkce změny v sobě nenese informaci, kde dané změny se uskutečňují. Pouze lze z ní vyčít, jak rychle se funkce mění v daném bodě. Proto primitivní funkce nezávisí na vertikálním umístění funkce.

Pro úplnost řešení je potřeba určit interval, na kterém je výsledek primitivní funkcí k zadané funkci. V tomto případě otevřené intervaly nesmějí obsahovat body $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. □

Předpokládá se, že hledání oboru funkce, kde je výsledek platný, je už zvládnutý z kapitoly o derivace. Proto je v následujících příkladech vynechaný. Pořád však nezapomínejte, že pro úplnost řešení je určení definičního oboru výsledku důležité.

Příklad 4.2. Vypočtěte následující integrál.

$$
\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x
$$

Řešení. Jako při jiných výpočtech, pokud nevím, jak to vypočítat, převedu to na něco, co umím, například pomocí substituce. Základní tvar substituce je

$$
\begin{aligned}
g(y) &= f(x) \\
g'(y)\,\mathrm{d}y &= f'(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Druhý řádek u substituce je potřeba, protože věta o substituci pro integrály využívá větu o derivaci složené funkce, kde docházelo k derivaci vnitřní a vnější funkce. Zde derivace vnitřní funkce je “reprezentována druhým” řádkem.

Pokud $g(y) = y$, pak je to přímá substituce. Příkladem je lineární substituce, kdy se substituuje $y = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$. Obecným principem je zjednodušit výraz do tvaru, který lze zintegrovat například pomocí tabulkových integralů.

Pokud $f(x) = x$, pak je to nepřímá substituce, tzn. je potřeba, aby funkce $g(y)$ měla inverzní funkci na určeném intervalu. Při tomto postupu se daný výraz zesložiťuje, což může jít proti intuici. Cíl je však setjný. Vytvořit výraz, který lze následně různými úpravami převést na tvar, který jsem schopný zintegrovat.

U integrálu ze zadání vadí odmocnina. Pokusíme se ji zbavit pomocí substituce $y = \sqrt{x}$.

$$\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \overset{\text{sub}}{=} \left| \begin{array}{rcl} y & = & \sqrt{x} \\ \mathrm{d}y & = & \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ 2\,\mathrm{d}y & = & \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\arctan(y) + c \overset{\text{sub}}{=} 2\arctan(\sqrt{x}) + c$$

Potřebné podmínky pro substituci se zkontrolovaly už při tvorbě substituce, kde se ukázalo, že substituovaná funkce má vlastní derivaci v definovaných bodech. □

Především nepřímá substituce je komplikovaná, protože je často založena na triku. Pokud tedy o něm nevíte, je těžké se k němu dobrat. Jestli vám bylo na přednášce řečeno, že nepřímá substituce není potřeba umět, s klidným svědomím ji ignorujte.

Příklad 4.3. Vypotěte následující integrál.

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$$

.

Řešení. Další důležitá technika používaná při integrování je metoda per partes. Její základní forma má tvar

$$\int F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)\,\mathrm{d}x$$

První použití je situace, kdy se používá derivace funkce $F(X)$ ke zjedošení celého výrazu, pokud funkce $G(x)$ je hezká. Například se využívá v situacích, kdy $F(X)$ je x^n, $n \in \mathbb{N}$, nebo $\ln(x)$.

Další vyžití metody perpartes se ukáže na příkladu ze zadání. Principem je vytvoření rovnice.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{per partes}}{=} & \left| \begin{array}{rclrcl} F(x) & = & -\cos(x) & G(x) & = & \sin(x) \\ f(x) & = & \sin(x) & g(x) & = & \cos(x) \end{array} \right| \\
= & -\cos(x)\sin(x) - \int \cos(x)(-\cos(x))\,\mathrm{d}x \\
= & -\sin(x)\cos(x) + \int (1 - \sin^2(x))\,\mathrm{d}x \\
= & -\sin(x)\cos(x) + \int 1\,\mathrm{d}x - \int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Získala se rovnice, kde levá strana rovnice se nachází ve výrazu v pravé straně rovnice. Tato skutečnost se využije k získání rovnice pro integrál ze zadání.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x &= -\sin(x)\cos(x) + \int 1\,\mathrm{d}x - \int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x \\
2\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x &= -\sin(x)\cos(x) + \int 1\,\mathrm{d}x \\
\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Na pravé straně se získal výraz, který už jde zintegrovat.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2} + c
\end{aligned}$$

$\square$

Příklad 4.4. Vypočtěte následující integrál.

$$\int \frac{3x^9 - 2x^8 + x^7 + 7x^6 - 12x^5 + 19x^4 - 19x^3 + 2x^2 - 32x + 6}{x^6 - x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení. V této části si ukážeme jak vyřešit integrál racionálně lomené funkce, tj. funkce tvaru $\frac{p(x)}{q(x)}$, kde $p(x)$ a $q(x)$ jsou polynomy v jedné proměnné x.

Nejprve se celý výraz převede do tvaru $r(x) + \frac{s(x)}{q(x)}$, kde stupeň polynomu $s(x)$ je ostře menší než stupeň polynomu $q(x)$, tzn. $deg(s(x)) < deg(q(x))$. Stupeň polynomu je hodnota největšího exponentu u x s nenulovým koeficientem. V zadání má polynom ve jmenovateli stupeň 6.

Tvar $r(x) + \frac{s(x)}{q(x)}$ se získá vydělením polynomu $p(x)$ polynomem $q(x)$. Algoritmus dělení polynomu polynomem funguje podobně jako při klasickém dělení. Polynom $r(x)$ se hledá od největšího členu. Vezme se dělenec $p(x)$ a najde se takový člen ax^n, jehož součin s dělitelem $q(x)$ dá polynom, $t(x) = p(x)ax^n$, jehož rozdíl s dělencem $p(x)$ vznikne polynom, $u(x) = p(x) - t(x)$, který má stupeň ostře menší než dělenec, $deg(t(x)) < deg(p(x))$. $u(x)$ je zbytek, který se stejným postupem dělí dál. Postup se zastaví, když jako rozdíl vyjde polynom, jehož stupeň je ostře menší než stupeň dělitele. Při výpočtu získáné hodnoty ax^n pak dají výsledný polynom $r(x)$. Zbytek pak reprezentuje $s(x)$.

Níže je příklad dělení u příkladu ze zadání. Na první řádce se nachází čitatel (dělenec), který se dělí. Pod ním se nachází jmenovatel (dělitel) výnásobený zápornou hodnotou v závorce nacházehící se na stejné řádce. Hodnoty v závorce tvoří hledaný podíl. Pod čarou se nachází součet polynomů nacházející se nad. Na poslední řádce je pak zbytek.

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrr}
 & 3x^9 & -2x^8 & +x^7 & +7x^6 & -12x^5 & +19x^4 & -19x^3 & +2x^2 & -32x & +6 \\
(3x^3) & -3x^9 & +3x^8 & -6x^7 & +9x^6 & -3x^5 & +6x^4 & -6x^3 & & & \\
\cline{2-8}
 & & x^8 & -5x^7 & +16x^6 & -15x^5 & +25x^4 & -25x^3 & +2x^2 & -32x & +6 \\
(x^2) & & -x^8 & +x^7 & -2x^6 & +3x^5 & -x^4 & +2x^3 & -2x^2 & & \\
\cline{3-9}
 & & & -4x^7 & +14x^6 & -12x^5 & +24x^4 & -23x^3 & +0x^2 & -32x & +6 \\
(-4x) & & & 4x^7 & -4^6 & +8x^5 & -12x^4 & +4x^3 & -8x^2 & +8x & \\
\cline{4-10}
 & & & & 10x^6 & -4x^5 & +12x^4 & -19x^3 & -8x^2 & -24x & +6 \\
(-10) & & & & -10x^6 & +10x^5 & -20x^4 & +30x^3 & -10x^2 & +20x & -20 \\
\cline{5-11}
 & & & & & 6x^5 & -8x^4 & +11x^3 & -18x^2 & -4x & -14
\end{array}
$$

Po dosazení do integrálu vypadá výraz následovně

$$
\int 3x^3 + x^2 - 4x - 10 + \frac{6x^5 - 8x^4 + 11x^3 - 18x^2 - 4x - 14}{x^6 - x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 2} \, \mathrm{d}x \tag{4.1}
$$

Začátek integrálu tvořený polynomem lze zintegrovat skrze tabulkové integrály. Je tedy potřeba vyřešit zlomek, tzn. případ, kdy $\int \frac{s(x)}{q(x)} \, \mathrm{d}x$ a $deg(s(x)) < deg(q(x))$.

Použije se věta o rokladu na parciálí zlomky, která ve zkratce dává následující rovnost. Je-li rozklad polynomu $q(x)$ roven $(x-\alpha_1)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)^{m_k}\cdot(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{n_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{n_l}$, kde $(x^2+\beta_i x+\gamma_i)$ jsou členy, které nelze dále rozložit, pak

$$
\begin{aligned}
\frac{s(x)}{q(x)} = {} & \frac{A_1^1}{x-\alpha_1} + \ldots + \frac{A_{m_1}^1}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + \ldots \\
& + \frac{A_1^k}{x-\alpha_k} + \ldots + \frac{A_{m_k}^k}{(x-\alpha_k)^{m_k}} \\
& + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1} + \ldots \frac{B_{n_1}^1 x + C_{n_1}^1}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{n_1}} + \ldots \\
& + \frac{B_1^l x + C_1^l}{x^2+\beta_l x+\gamma_l} + \ldots \frac{B_{n_l}^l x + C_{n_l}^l}{(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{n_l}}
\end{aligned}
$$

V našem případě je nejprve potřeba rozložit polynom ve jmenovateli, tzn. $x^6-x^5+2x^4-3x^3+x^2-2x+2$, na součin polynomů, které nelze dále rozložit. Ačkoliv existuje věta, zaručují existenci rozkladu, neexistuje jednoduchý a zaručený postup pro jeho získání. Bohužel na jeho probrání není prostor. Jediné, co zbývá, je hádat. Touto metodou se hádá kořen polynomu, tj. hodnoty, kdy $q(a)=0$. Pro takové a platí, že polynom $q(x)$ lze vydělit výrazem $(x-a)$ beze zbytku, tzn. $q(x)=(x-a)\cdot q_1(x)$. Takto se postupuje, dokud polynom $q_i(x)$ nelze dále rozložit.

Většinou se hádají malé hodnoty, $0,1,-1,\ldots$. V případě rokládaného polynomu vychází, že kořenem je 1. Po vydělení vyjde polynom $x^5+2x^3-x^2-1$, který má za kořen znovu 1. Po vydělení $(x-1)$ vyjde $x^4+x^3+3x^2+2x+1$. Nově vzniklý polynom už nemá za kořen ani 1, ani -1, nebo jiné hezké přirozené číslo.

Toto je hlavní problém při integrování parciálních zlomků. V reálné situaci, kdy je potřeba najít daný rozklad, nezbývá nic jiného, než použít program, který má v sobě co nejvíce metod pro řešení polynomů, a doufat, že program doběhne v rozumném čase a nalezne rozklad. U zkoumaného polynomu roklad vyjde

$$x^6-x^5+2x^4-3x^3+x^2-2x+2=(x-1)^2(x^2+2)(x^2+x+1)$$

Použitím věty o rokladu na parciální zlomky vyjde

$$
\begin{aligned}
&\frac{6x^5 - 8x^4 + 11x^3 - 18x^2 - 4x - 14}{x^6 - x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 2} \\
&\qquad = \frac{6x^5 - 8x^4 + 11x^3 - 18x^2 - 4x - 14}{(x-1)^2(x^2+2)(x^2+x+1)} \\
&\qquad = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{x^2+4x+5}
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Neznámé donoty $A, \ldots, F$ se získají vytvořením soustavy rovnic. Soustava se získá úpravou výše získané rovnice. Nejprve se celá rovnice vynásobí hodnotami ve jmenovateli, aby se odstranily zlomky.

$$
\begin{aligned}
&A(x-1)(x^2+2)(x^2+x+1) + B(x^2+2)(x^2+x+1) \\
&\quad +(Cx+D)(x-1)^2(x^2+x+1) \\
&\quad +(Ex+F)(x-1)^2(x^2+2)
\end{aligned}
$$

Následně se výraz roznásobí a koeficinty u stejného členu x^n se shromáždí dohromady.

$$
\begin{aligned}
&(A+C+E)x^5 + (B-C+D-2E+F)x^4 \\
&\quad +(2A+B-D+3E-2F)x^3 \\
&\quad +(-A+3B-C-4E+3F)x^2 \\
&\quad +(2B+C-D+2E-4F)x \\
&\quad +(-2A+2B+D+2F)
\end{aligned}
$$

Protože získaný polynom se musí rovnat polynomu $x^6 - x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 2$, musí se rovnat hodnoty u příslušných členů x^n.

$$
\begin{aligned}
x^5 :&\quad 6 = A + C + E \\
x^4 :&\ -8 = B - C + D - 2E + F \\
x^3 :&\quad 11 = 2A + B - D + 3E - 2F \\
x^2 :&-18 = -A + 3B - C - 4E + 3F \\
x^1 :&\ -4 = 2B + C - D + 2E - 4F \\
x^0 :&-14 = -2A + 2B + D + 2F
\end{aligned}
$$

Získala se soustava šesti rovnic se šesti proměnnými. Jejím vyřešením se dostanou hodnoty

$$A = 4,\ B = -3,\ C = 0,\ D = -2,\ E = 2,\ F = 1$$

Metodou tvorby soustavy rovnic lze vždy získat potřebné hodnoty, ale ilustrujme si ještě jednu metodu, kterou nelze vždy použít, ale někdy je rychlejší než tvorba soustavy. Takzvaná zakrývací metoda.

Zakrývací metodu lze použít pro získání hodnot proměnných u zlomků, které mají ve jmenovatli výraz $(x-a)^n$, který je umocněn maximální hodnotou pro daný základ mocniny, tzn. pokud se základ mocniny nachází ve jmenovateli jiného zlomky, jeho exponent je menší. V našem případě lze metodu aplikovat pouze pro $\frac{B}{(x-1)^2}$, ale ne pro $\frac{A}{x-1}$.

Metoda funguje následujícím způsobem. Vezme se zlomek $z(x)$ na druhém řádku rovnice 4.2. Pokud se chce získat hodnota například pro $\frac{B}{(x-1)^2}$, vezme se jeho kořen, v tomto případě 1, a dosadí se za x do $z(x)$, ze kterého se před dosazením odstraní výraz $(x-1)^2$, tnz. odstraňuje se stejný výraz jako výraz ve zlomku, u kterého se určuje hodnota proměnné.

$$\frac{6x^5 - 8x^4 + 11x^3 - 18x^2 - 4x - 14}{(x-1)^2(x^2+2)(x^2+x+1)} \xrightarrow{\text{odsranění}}$$
$$\frac{6x^5 - 8x^4 + 11x^3 - 18x^2 - 4x - 14}{(x^2+2)(x^2+x+1)} \xrightarrow{\text{dosazení}}$$
$$\frac{6 \cdot 1^5 - 8 \cdot 1^4 + 11 \cdot 1^3 - 18 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 14}{(1^2+2)(1^2+1+1)} = -3$$

Použitím rokladu se nakonec získal integrál

$$\int \left(\frac{4}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{2}{x^2+2} + \frac{2x+1}{x^2+x+1} \right) \mathrm{d}x =$$
$$\int \frac{4}{x-1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{2}{x^2+2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

První dva integrály se za použití lineární substituce převedou na tabulkový integrál. Třetí integrál se algebraicky upravý na tvar vhodný pro přímou substituci na tabulkový integrál, nebo se rovnou použije nepřímá substituce. U posledního integrálu lze pozorovat, že čitatel je derivací jmenovatele, tzn. použije se přímá substituce.

$$\int \frac{4}{x-1}\,\mathrm{d}x \overset{\text{sub}}{=} \left| \begin{array}{rcl} y &=& x-1 \\ \mathrm{d}y &=& \mathrm{d}x \end{array} \right| = 4\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = 4\ln|y| + c$$
$$\overset{\text{sub}}{=} 4\ln|x-1| + c$$
$$\int \frac{3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{sub}}{=} \left| \begin{array}{rcl} y &=& x-1 \\ \mathrm{d}y &=& \mathrm{d}x \end{array} \right| = 3\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{-3}{y} + c$$
$$\overset{\text{sub}}{=} \frac{-3}{x-1} + c$$
$$\int \frac{2}{x^2+2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{sub}}{=} \left| \begin{array}{rcl} \sqrt{2}y &=& x \\ \sqrt{2}\,\mathrm{d}y &=& \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{2\sqrt{2}}{2y^2+2}\,\mathrm{d}y = \frac{2\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y$$
$$= \sqrt{2}\arctan(y) + c \overset{\text{sub}}{=} \sqrt{2}\arctan(\frac{x}{\sqrt{2}})$$
$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \overset{\text{sub}}{=} \left| \begin{array}{rcl} y &=& x^2+x+1 \\ \mathrm{d}y &=& 2x+1\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \ln|y| + c$$
$$\overset{\text{sub}}{=} \ln|x^2+x+1| + c$$

Výše vypsané metody jsou základní způsoby integrování parciálních zlomků. Snahou je převod zlomku na tabulkové integrály tvaru $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x$, $n > 1$, $\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$, atd. Výsledkem integrování výrazu ze zadání je pak

$$\frac{3x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} - 10x + 4\ln|4| + \frac{3}{x-1} - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \ln|x^2+x+1| + c$$

□

4.2 Určitý integrál

Příklad 4.5. Vypočtěte následující integrál.

$$\int_{1/2}^{2} \left(1 + x + \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení. Počítá se Riemannův integrál, ale protože integrovaná funkce je spojitá na intervalu $[\frac{1}{2}, 2]$, díky 2. základní věty analýzy lze při počítání používat techniky určené pro Newtonův integrál.

U integrované funkce nejvíce vadí $e^{x+\frac{1}{x}}$. Je to složená funkce a narozdíl od derivace zde není k dispozici věta zaručující existenci primitivní funkce ke složené funkci. Jediná věta podobající se větě o derivaci složené funkce je věta o substituci pro určitý integrál. Při splnění potřebných předpokladů věta dává rovnost

$$(\mathrm{N})\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t = (\mathrm{N})\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Je tedy třeba určit $\phi(t)$ a $f(x)$. U tohoto příkladu je $\phi(t)$ už určeno, protože je potřeba se zbavit exponentu u $e^{x+\frac{1}{x}}$, tzn. substituce je dána rovnicemi.

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= t \\ 1 - \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Pokud se chce provést výše napsaná subsituce, je potřeba, aby integrál obsahoval $1-\frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$. Nejjednodušší způsob, jak zlomek dostat do integrované funkce, je rozšířit integrovanou funkci požadovaným zlomkem a jejím inverzem.

$$\left(1 + x + \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2-1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2-1}$$

Daslším krokem je zbavi se proměnné x u $\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)\frac{x^2}{x^2-1}$ skrze vytvořenou substituci. Nastává však otázka, jak upravit výraz použitím algebraických vzorců a úprav, aby šla použít substituce. Navíc se tu nachází x^2-1 a jeho přavod na x^2+1 nemusí vůbec vyjít.

Je třeba najít trochu jinou cestou. Další důležitá technika je integrace metodou per partes. Skrze ní by se mohl vytvořit výraz, který by šel lépe upravit pomocí substituce. Protože $e^{x+\frac{1}{x}}$ se integruje použitím substituce, při použití metody per partes bude tou částí, která se zderivuje, tzn. ve výsledném integrálu se objeví výraz $\frac{x^2-1}{x^2}$. Integrovat celý výraz $(1+x+\frac{1}{x})$ nedává smysl, protože integrál funkce $\frac{1}{x}$ je $\ln(x)$. Tím si moc nepomůžeme. Má tedy smysl pouze integrovat první dva sčítance. Zbývá určit, zdali zintegrovat oba sčítance.

Upravíme si výraz v závorce, aby se ukázalo, zdali se substituované výrazy, $\frac{x^2+1}{x}$ nebo $\frac{x^2-1}{x^2}$, už částečně nenachází v součtu. To určí strategii pro metodu per partes.

$$(x + 1 - \frac{1}{x}) = (1 + x - \frac{1}{x}) = (1 + \frac{x^2-1}{x})$$

Substituovaný výraz se částečně nachází ve druhém sčítanci. Pokud se tedy pomocí metody per partes zintegruje pouze první sčítanec, tak by se mohl dostat výraz, který by šel lépe substituovat pomocí připravené substituce.

$$\int_{1/2}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} \, \mathrm{d}x = \int_{1/2}^{2} e^{x+\frac{1}{x}} \, \mathrm{d}x + \int_{1/2}^{2} \frac{x^2-1}{x} e^{x+\frac{1}{x}} \, \mathrm{d}x$$

Metodou per partes se zintegruje první sčítanec.

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^{2} e^{x+\frac{1}{x}} \, \mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{lllll} F(x) = & x & G(x) & = & e^{x+\frac{1}{x}} \\ f(x) = & 1 & g(x) & = & e^{x+\frac{1}{x}} \frac{x^2-1}{x^2} \end{array} \right| \\ &= [xe^{x+\frac{1}{x}}]_{1/2}^{2} - \int_{1/2}^{2} xe^{x+\frac{1}{x}} \frac{x^2-1}{x^2} \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Použití metody per partes bylo korektní, protože funkce f, g jsou spojité, mají primitívní funkce na intervalu $(1/2, 2)$ a lze je spojitě rozšířit do koncových bodů.

$$\begin{aligned} &\int_{1/2}^{2} e^{x+\frac{1}{x}} \, \mathrm{d}x + \int_{1/2}^{2} \frac{x^2-1}{x} e^{x+\frac{1}{x}} \, \mathrm{d}x \\ &= [xe^{x+\frac{1}{x}}]_{1/2}^{2} - \int_{1/2}^{2} e^{x+\frac{1}{x}} \frac{x^2-1}{x} \, \mathrm{d}x + \int_{1/2}^{2} \frac{x^2-1}{x} e^{x+\frac{1}{x}} \, \mathrm{d}x \\ &= [xe^{x+\frac{1}{x}}]_{1/2}^{2} \end{aligned}$$

Měli jsme štěstí. Integrál se složenou exponenticální funkcí se vykrátil, tzn. není potřeba už řešit substituci. Zbývá pouze dopočítat.

$$\int_{1/2}^{2} \left(1 + x + \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} \, \mathrm{d}x = [xe^{x+\frac{1}{x}}]_{1/2}^{2} = 2e^{2+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}+2} = \frac{3}{2} e^{\frac{5}{2}}$$

□

Příklad 4.6. Vypočtěte následující limitu.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} \, \mathrm{d}t \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} \, \mathrm{d}t}$$

Řešení. Funkce e^x je roustoucí, proto podle intuice se limita $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ rovná $+\infty$. Důkaz se provede použitím věty dávající do vztahu řady a integrály. Protože e^{t^2} je funkce rostoucí, podmínka věty je splněna. Nakonec se použije věta o limitě funkcí a uspořádání, a Heineho věta.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^n e^{t^2}\,\mathrm{d}t\\ &\geq \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1} e^{k^2}\\ &\geq \lim_{n\to+\infty} e^{n-1} = +\infty\end{aligned}$$

Použitím stejného postupu na integrál ve jmenovateli vychází, že zkoumaná limita má tvar $\frac{\infty}{\infty}$, tzn. je to kandidát na l'Hospitalovo pravidlo. Je pouze potřeba zjistit, že jak jmenovatel, tak i čitatel jsou diferenciovatelné na určitém okolí $+\infty$.

Pro derivaci integrálu se použije 1. základní věta analýzy. Integrované funkce jsou spojité, tzn. Riemannův integrál existuje.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\displaystyle\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t} &\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{e^{x^2}}\\ &\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}}{e^{x^2}\cdot 2x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0\end{aligned}$$

Druhé použití l'Hospitalova pravidla bylo také korektní. Podmínky se dají snadno ukázat. Vyšlo, že celá limita jde k 0. □

4.3 Aplikace

Příklad 4.7. Vypočtěte obsah následující rovinné plochy vymezené křivkami.

$$y = 2^x, y = 2, x = 0$$

Řešení. Při počítání obsahu se využívá toho, že určitý inegrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ počítá obsach plochy mezi funkcí $f(x)$ a osou x v intervalu $[a,b]$. Pokud je plocha omezena shora funkcí $g(x)$ a ze spoda funkcí $h(x)$, použije se jejich rozdíl $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$.

U zkoumané plochy je potřeba nejprve identifikovat oblast, kterou je potřeba vypočítat. Funkce $y = 2^x$ a $y = 2$ rozdělují plochu na čtyři části a pouze jedna z nich lze omezi osou y, tzn. křivkou $x = 0$. Je to část mezi 0 a místem, kde se kříží funkce $y = 2^x$ a $y = 2$, tzn. $2^x = 2$, neboli $x = 1$. V intervalu $[0,1]$ je funkce $y = 2$ větší než $y = 2^x$, tzn. integrál 2^x se odečte od integrálu 2.

$$\begin{aligned}\int_0^1 2\,\mathrm{d}x - \int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x = [2x]_0^1 - [\frac{2^x}{\ln(2)}]_0^1 = (2\cdot 1 - 2\cdot 0) - \left(\frac{2^1}{\ln(2)} - \frac{2^0}{\ln(2)}\right)\\ = 2 - \frac{1}{\ln(2)}\end{aligned}$$

□

Příklad 4.8. Vypočtěte délku následující křivky.

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x),\ \ 1 \leq x \leq e$$

Řešení. Pro výpočet délky křivky se použije vzorec $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int_1^e \sqrt{1 + \left(\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x)\right)'\right)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^e \sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{4x^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^e \frac{x^2+1}{2x}\,\mathrm{d}x \qquad (4.3)\\ &= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \ln(x)\right)\right]_1^e\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} + 0\right) = \frac{e^4+1}{4}\end{aligned}$$

U 4.3 se mohla při odstraňování odmocniny vynechat absolutní hodnota, protože se pracuje na intervalu $[1,e]$ a celý výraz je vždy kladný. □

Příloha A

Elementární derivace

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1},\ x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{N} \tag{A.1}$$

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ a \in \mathbb{Z}^- \tag{A.2}$$

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1},\ x \in \mathbb{R}^+,\ a \in \mathbb{R} \tag{A.3}$$

$$(e^x)' = e^x,\ x \in \mathbb{R} \tag{A.4}$$

$$(a^x)' = a^x \ln(a),\ x \in \mathbb{R} \tag{A.5}$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x},\ x > 0 \tag{A.6}$$

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{\ln(a) \cdot x},\ x > 0 \tag{A.7}$$

$$(\sin(x))' = \cos(x),\ x \in \mathbb{R} \tag{A.8}$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x),\ x \in \mathbb{R} \tag{A.9}$$

$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x),\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \tag{A.10}$$

$$(\cot(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \tag{A.11}$$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\ x \in (-1, 1) \tag{A.12}$$

$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\ x \in (-1, 1) \tag{A.13}$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1 + x^2},\ x \in \mathbb{R} \tag{A.14}$$

$$(\text{arccot}(x))' = -\frac{1}{1 + x^2},\ x \in \mathbb{R} \tag{A.15}$$

Příloha B

Tabulkové integrály

$$\int x^a \,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c,\ x \in \mathbb{R},\ a \geq \mathbb{Z}_0^+ \tag{B.1}$$

$$\int x^a \,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ a \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1\} \tag{B.2}$$

$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + c,\ x \in \mathbb{R} \tag{B.3}$$

$$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + c,\ x \in \mathbb{R},\ a > 0 \wedge a \neq 1 \tag{B.4}$$

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + c, x \in (-\infty, 0) \vee x \in (0, +\infty) \tag{B.5}$$

$$\int \sin(x) \,\mathrm{d}x = -\cos(x) + c,\ x \in \mathbb{R} \tag{B.6}$$

$$\int \cos(x) \,\mathrm{d}x = \sin(x) + c,\ x \in \mathbb{R} \tag{B.7}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \,\mathrm{d}x = \tan(x) + c,\ x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \tag{B.8}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} \,\mathrm{d}x = -\cot(x) + c,\ x \in (k\pi, \pi + k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \tag{B.9}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \arcsin(x) + c \\ -\arccos(x) + c \end{cases} x \in (-1, 1) \tag{B.10}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \arctan(x) + c \\ -\operatorname{arccot}(x) + c \end{cases} x \in \mathbb{R} \tag{B.11}$$

Příloha C

Chybná řešení, nebo neúplná řešení

Zde se nacházejí chyby, na které jsem narazil při opravách domácích ukolů. V textu se používá fráze “triviální krok/operace”. Triviální krok pro naše potřeby znamená matematická technika/operace probíraná na základních školách, při tom se ignoruje látka probíraná navíc ve speciálních třídách pro nadané jedince.

C.1 Limity posloupností

I. Dokazuje se, že $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty,\ q > 1$.

Chybné řešení: Posloupnost je rostoucí, proto se blíží k ∞, neboli jeho limita je rovna ∞.

Není pravda, že pokud posloupnost roste, pak roste do nekonečna. Například funkce $arctg$ je rostoucí, ale je shora omezená hodnotou $\pi/2$. Pokud se chce dokázat, že funkce má limitu v nekonečnu, je potřeba to dokázat použitím definice, tzn. $\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \forall n > n_0 : a_n > K$. Toto nelze vynechat, protože to nelze počítat mezi triviální krok.

II. Dokazuje se, že $\lim_{n\to\infty} q^n = 0,\ q \in (-1, 0)$, použitím $\lim_{n\to\infty} q^n = 0,\ q \in (0, 1)$.

Chybné řešení: Sudé členy posloupnosti tvoří podposloupnost posloupnosti $(q^n)_{n\to\infty}$, $q \in (0, 1)$, tzn. podle věty o podposloupnostech jdou k 0. Vezmou-li se liché členy a výnasobí se -1, je výsledná posloupnost znovu podposloupností posloupnosti $(q^n)_{n\to\infty}$, $q \in (0, 1)$. Použitím aritmetiky pak vyjde, že $-1 \cdot \lim_{n\to\infty} -1 \cdot q^{2n+1} = -1 \cdot 0 = 0$. Tedy celá posloupnost $(q^n)_{n\to\infty}$ má limitu v 0.

Pokud se počítá limita posloupnosti z chování jejích podposloupností, je potřeba vyšetřit všechny podposloupnosti. Nelze z pozorování na konečném počtu podposloupností odvodit limitu celé posloupnosti bez přidání dodatečných předpokladů. V tomto případě se udělala dobrá pozorování, ale samotná realizace byla chybná. Pokud chci z chování konečného počtu podposloupností odvodit limitu celé posloupnosti, je například k dispozici věta policajtech. Je však potřeba mít na paměti, že nově nalezené posloupnosti musí shora a zdola omezovat zkoumanou posloupnost.

III. Dokazuje se, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,\ a > 0$.

Neúplné řešení: Zlomek lze rozložit na $\underbrace{\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{n}}_{n}$. *Protože a je fixní, existuje* $n > a$, *tzn. pouze konečný počet zlomků je větších než* 1 *a zbylé zlomky, které jsou menší než* 1, *převáží. Tedy celá limita se rovná* 0.

Toto řešení lze považovat pouze za plán řešení, ve kterém si vytvořím nějakou představu o příkladu, kterou se pak snažím dokázat. Nelze to však považovat za úplné řešení, protože tu chybí důkat, že "zbylé zlomky převáží". Aparát matematické analýzu tu máte k tomu, aby se tvrzení typu "...roste nad veškeré meze ..." dala dokázat pomocí fomálních nástrojů matematiky. Řešení se považuje za spávné, pokud jste úkazali, že každý krok jste schopni formálně dokázat.

Literatura

[1] L. Pick, S. Hencl, J. Spurný, M. Zelený: Matematická analýza 1 (velmi předběžná verze), (2018)

[2] B. P. Děmidovič: Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy, (2003)