

Domácí úkol č. 7

Termín odevzdání 20.5. 2019 (viz stránky cvičení)

Jméno: _____

Každé svoje tvrzení odůvodněte. Konstatování bez odůvodnění nebude počítáno jako odpověď. (Viz stránky cvičení, <https://kam.mff.cuni.cz/~amemori>)

Každý příklad je za 3 body. Vypočítejte tolik příkladů, kolik potřebujete pro získání zápočtu. Těžší jsou označeny hvězdičkou.

- 1) V nejmenovaném výboru je každý člen součástí právě tří podvýborů a každý podvýbor má přesně tři členy. Dokažte, že počet členů výboru se rovná počtu podvýborů.
- 2) Mějme nyní 100 studentů a 10 přednášek. Každou přednášku si zapsalo nejvýše 30 studentů. Dokažte, že existují dva studenti, kteří si nezapsali žádnou společnou přednášku.
- 3) (*) 200 studentů se zúčastnilo matematické olympiády, kde měli za úkol spočítat šest příkladů. Je známo, že každý problém byl správně vyřešen alespoň 120 účastníky. Dokažte, že musí existovat dvojice studentů tak, že každý příklad byl vyřešen alespoň jedním studentem ze dvojice.
- 4) (*) Duma má 1600 delegátů, kteří vytvořili 16000 výborů, kde každý výbor se skládá z 80 členů. Dokažte, že lze nalézt dvojici výborů, které mají alespoň čtyři členy společné.
- 5) (*) Necht' S je množina n bodů v rovině, pro které platí, že:
 - (a) žádně tři neleží na jedné přímce a
 - (b) pro každý bod P z množiny S lze nalézt alespoň k bodů z množiny S tak, že se všechny nacházejí ve stejné vzdálenosti od P .

Dokažte (pro k, n kladná přirozená čísla)

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{(2n)}.$$