Bonusová série č. 1

Termín odevzdání 4.1.2019 10:40

Jméno: ____________________

Každé svoje tvrzení odůvodněte. Konstatování bez odůvodnění nebude počítáno jako odpověď.

1. (3b) Pro relaci R na množině X definujeme indukcí symbol R^n: $R^1 = R$, $R^{n+1} = R \circ R^n$.

   a) Ukažte, že je-li X konečná množina a R relace na ní, potom existují $r, s \in \mathbb{N}$, $r < s$ taková, že $R^r = R^s$.

   b) Najděte relaci R na konečné množině takovou, že $R^n \neq R^{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

   c) Ukažte, že je-li X nekonečná, tvrzení (a) platit nemusí (tj. Existuje relace R taková, že všechny relace tvaru R^n jsou navzájem různé).

2. (1b) Dokažte, že uspořádání $(N \setminus \{1\}, |)$ má nekonečně mnoho minimálních prvků. (Pro přirozená čísla a, b symbol $a|b$ znamená „a dělí b“, neboli že existuje přirozené číslo c takové, že $b = ac$.)

3. (2b) Buď $(X, \preccurlyeq)$ uspořádaná množina, $A \subseteq X$ její podmnožina. Prvek $s \in X$ nazveme *supremum* množiny A, pokud platí:

i. $a \preccurlyeq s$ pro každé $a \in A$.

ii. Pro každé $s' \in X$ platí: jestliže $a \preccurlyeq s'$ pro každé $a \in A$, potom $s \preccurlyeq s'$.

Podobně, ale se všemi nerovnostmi v obráceném směru, se definuje *infimum* podmnožiny $A \subseteq X$.

a) Jaký prvek je supremem prázdné množiny?

b) Najděte příklad uspořádané množiny, jejíž každá neprázdná podmnožina má supremum , ale ne každá neprázdná podmnožina má infimum.