**Tietzeova věta o rozšíření funkcí.**

(pro ty, kdo chějí znát důkaz)

**1.** Z Textu budeme potřebovat pojem stejnoměrné konvergence zobrazení mezi metrickými prostory (Kapitola XVIII, Sekce 1): $f_n : X \to Y$ *stejnoměrně konvergují* k $f : X \to Y$, značení

$$f_n \rightrightarrows f,$$

jestliže

$$\forall \varepsilon \exists n_0,\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ \forall x, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(všimněte si, že $n_0$ závisí jen na $\varepsilon$, **ne** na $x$ na rozdíl od *bodové konvergence* $f_n \to f$ kde předpokládáme jen, že $\lim_n f_n(x) = f(x)$ pro všechna $x$).
Na rozdíl od bodové konvergence platí, že

*je-li $f_n \rightrightarrows f$ a jsou-li všechna $f_n$ spojitá, je i $f$ spojité.*

(Text XVIII,1.3, velmi snadné.)
Není asi třeba dodávat, že řada funkcí

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

konverguje stejnoměrně jestliže posloupnost $(\sum_{k=1}^{n} f_k(x))_n$ konverguje stejnoměrně.

**2. Tietzeova věta pro funkce s hodnotami v kompaktním intervalu.**
Jsou dány: metrický prostor $X$, uzavřená $Y \subseteq X$, spojitá funkce $f : Y \to \langle -1, 1 \rangle$.

Cíl: Spojitá funkce $g : X \to \langle -1, 1 \rangle$ taková, že $g|Y = f$.

Užitečné funkce: Buďte $A, B \subseteq X$ disjunktní uzavřené, $\alpha, \beta \in \langle -1, 1\rangle$. Položme

$$\phi\{A, B; \alpha, \beta\}(x) = \alpha + (\beta - \alpha)\frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

($d$ je vzdálenost v $X$). Uvědomte si, že protože jsou $A, B$ disjunktní a uzavřené je $d(x, A) + d(x, B) \neq 0$ pro všechna $x$ ($d(x, A) + d(x, B) = 0$ by dalo $x \in \overline{A} \cap \overline{B} = A \cap B$) a tedy je $\phi\{A, B; \alpha, \beta\}$ spojitá funkce. Pro $\phi = \phi\{A, B; \alpha, \beta\}$ platí

$$\phi[A] \subseteq \{\alpha\}, \phi[B] \subseteq \{\beta\} \text{ a všechny } \phi(x) \text{ jsou mezi } \alpha \text{ a } \beta.$$

Konstrukce: Položme $f_0 = f$, $A_1 = f^{-1}[\langle -1, -\frac{1}{3}\rangle]$, $B_1 = f^{-1}[\langle \frac{1}{3}, 1\rangle]$, $\phi_1 = \phi\{A_1, B_1; -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ a $f_1(x) = f(x) - \phi_1(x)$ pro $x \in Y$. Potom je

$$|\phi_1(x)| \leq \frac{1}{3} \quad \text{a} \quad |f_1(x)| \leq \frac{2}{3}.$$

Předpokládejme nyní, že již máme spojité

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \text{ na } X \quad \text{a} \quad f = f_0, f_1, \ldots, f_n \text{ na } Y \qquad (*)$$

takové, že pro každé $k \leq n$ je

$$|f_k(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad \text{and} \quad |\phi_k(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}. \qquad (**)$$

Položme
$A_{n+1} = f_n^{-1}[\langle -\left(\frac{2}{3}\right)^n, -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\rangle]$, $B_{n+1} = f_n^{-1}[\langle \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \left(\frac{2}{3}\right)^n\rangle]$,
$\phi_{n+1} = \phi\{A_{n+1}, B_{n+1}; -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\}$,
a $f_{n+1}(x) = f_n(x) - \phi_{n+1}(x)$ pro $x \in Y$
(děláme s funkcí $f_n$ to co jsme udělali s $f = f_0$ nahoře). Tím jsou $\phi_k$ a $f_k$ z $(*)$ splňující $(**)$ o krok rozšířeny.

Žádaná funkce $g$: Pro $x \in X$ položme

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x).$$

Tak je definována funkce $X \to \langle -1, 1\rangle$ (neboť $|g(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}3 = 1$) a tato funkce je spojitá, protože ta řada (to jest, posloupnost $(\sum_{k=1}^{n} \phi_n(x))_n$) zřejmě konverguje stejnoměrně.
Konečně pak pro $x \in Y$ máme $f_k(x) = f_{k+1}(x) + \phi_{k+1}(x)$ a tedy

$$f(x) = f_1(x) + \phi_1(x) = f_2(x) + \phi_2(x) + \phi_1(x) = \cdots$$
$$\cdots = f_n(x) + \sum_{k=1}^{n} \phi_n(x)$$

a jelikož $\lim_n f_n(x) = 0$ dostáváme $f(x) = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \phi_n(x) = g(x)$.

Když to shrneme a vezmeme v úvahu, že každý netriviální kompaktní interval je homeomorfní s $\langle -1, 1\rangle$ vidíme, že platí

**Věta.** (Tietze) *Buď $Y$ uzavřený podprostor metrického prostoru $X$, buď $J$ kompaktní interval a buď $f : Y \to J$ spojitá funkce. Potom existuje spojitá $g : X \to J$ taková, že $g|Y = f$.*

*Explicitněji, buď $Y$ uzavřená podmnožina metrického prostoru $X$. Potom každou reálnou funkci $f$ na $Y$ takovou, že $a \leq f(x) \leq b$ pro všechna $x$ můžeme rozšířit na stejně omezenou spojitou $g$ na $X$.*