Čísla.

Přirozená čísla

ℕ 0, následník, indukce
aritmetika: sčítání, násobení, 1=0'

$$
\begin{array}{ll}
a+0=a & a\cdot 1=a\\
(a+b)+c=a+(b+c) & (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)\\
a+b=b+a & a\cdot b=b\cdot a\\
(a+b)c=ac+bc &
\end{array}
$$

Dále máme:
uspořádání $a \leq b \quad (\exists x, a+x=b)$

$a \leq a$ a $a \leq b$ & $b \leq a$ jen když $a=b$

$a \leq b$ a $b \leq c \;\Rightarrow\; a \leq c$

$\forall a, b,$ buď $a \leq b$ anebo $b \leq a$

$a \leq b \;\Rightarrow\; a+c=b+c$

$a \leq b \;\Rightarrow\; a\cdot c=b\cdot c$

Peanovy axiomy.

$n \neq 0$ je m' právě jednoho m,

0 není následník,

z $A(0)$ a $A(n) \Rightarrow A(n')$ plyne $\forall n A(n)$

($A(n) \equiv$ "*Tvrzení A platí pro n*")

$n + 0 = 0, \quad n + m' = (n + m)'$

$n0 = 0, \quad nm' = nm + n$

Příklady: 1. *Associativita sčítání*:

$(m+n)+0 = m+n = (m+0)+n, \quad m+(n+p') = m+(n+p)' = (m+(n+p))' = ((m+n)+p)' = (m+n)+p'$

2. $0 + n = n$:

$0 + 0 = 0, \quad 0 + n' = (0 + n)' = n'$

3. *Definujme* $1 = 0'$. *Potom* $n' = n + 1$ *a* $n' = 1 + n$:

$0' = 1 = 1 + 0 = 0 + 1, \quad n' = (n + 0)' = n + 0' = n + 1, \quad 1 + n' = (1 + n)' = (n')'$

4. *Komutativita sčítání*:

$m+n' = (m+n)' = (n+m)' = n+m' = n+(1+m) = (n + 1) + m = n' + m$

5. *Distributivita*:

$(m+n)p' = (m+n)p+m+n = mp+np+m+n = (mp + m) + (np + n) = mp' + np'$

Celá čísla

$\mathbb{Z}$:

aritmetika: sčítání, 0, odčítání, násobení, 1

$$a + 0 = a \qquad a1 = a$$
$$(a+b)+c = a+(b+c) \qquad (ab)c = a(bc)$$
$$a+b = b+a \qquad ab = ba$$
$$(a+b)c = ac + bc$$
$$\forall a \exists b,\ a+b=0 \quad \text{(NOVINKA)}$$

Dále máme stále uspořádání

$a \leq a$ a $a \leq b$ & $b \leq a$ jen když $a = b$

$a \leq b$ and $b \leq c \ \Rightarrow\ a \leq c$

$\forall a, b,$ buď $a \leq b$ anebo $b \leq a$

$a \leq b \ \Rightarrow\ a + c = b + c$

$a \leq b$ and $0 \leq c \ \Rightarrow\ ac \leq bc$ (MODIFIKOVÁNO)

Racionální čísla

$\mathbb{Q}$:

aritmetika: sčítání, 0, odčítání, násobení, 1, dělení

Uspořádání

$$a + 0 = a \qquad a1 = a$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (ab)c = a(bc)$$

$$a + b = b + a \qquad ab = ba$$

$$(a + b)c = ac + bc$$

$$\forall a \exists b,\ a + b = 0$$

$$\forall a \neq 0 \exists b,\ ab = 1$$ (NOVINKA)

$a \leq a$ a $a \leq b$ & $b \leq a$ jen když $a = b$

$a \leq b$ a $b \leq c \;\Rightarrow\; a \leq c$

$\forall a, b,$ buď $a \leq b$ anebo $b \leq a$

$a \leq b \;\Rightarrow\; a + c = b + c$

$a \leq b$ a $0 \geq c \;\Rightarrow\; ac \leq bc$

(USPOŘÁDANÉ TĚLESO)

Reálná čísla

$\mathbb{R}$:

aritmetika: sčítání, 0, odčítání, násobení, 1, dělení

uspořádání

$$a + 0 = a \qquad a1 = a$$
$$(a+b)+c = a+(b+c) \qquad (ab)c = a(bc)$$
$$a + b = b + a \qquad ab = ba$$
$$(a+b)c = ac + bc$$
$$\forall a \exists b,\ a + b = 0$$
$$\forall a \neq 0 \exists b,\ ab = 1$$

$$a \leq a \quad \text{a} \quad a \leq b \ \&\ b \leq a \text{ jen když } a = b$$
$$a \leq b \text{ a } b \leq c \ \Rightarrow\ a \leq c$$
$$\forall a, b,\ \text{buď } a \leq b \text{ anebo } b \leq a$$
$$a \leq b \ \Rightarrow\ a + c = b + c$$
$$a \leq b \text{ a } 0 \leq c \ \Rightarrow\ ac \leq bc$$

a <u>každá neprázdná omezená množina má supremum.</u> (NOVINKA)

(ÚPLNÉ USPOŘÁDANÉ TĚLESO)

Poznámky.

1. Při práci s reálnými čísly užíváme jen uvedené vlastnosti.

2. Komplexní čísla tvoří také těleso, ale nedají se (lineárně) uspořádat.

3. Reálným číslům dáváme víc struktury, totiž vzdálenost $|x - y|$, čímž se stanou euklidovskou přímkou.

4. Termín *úplný* má dva významy. V teorii uspořádání se týká existencí suprem všech podmnožin (částečně) uspořádané množiny. V metrických prostorech znamená konvergenci všech Cauchyovských posloupností. Tak např. je každý euklidovský prostor (včetně komplexní roviny) úplný v druhém smyslu aniž by byl jakkoli uspořádaný.

5. Reálná čísla jsou úplná v obou smyslech. Přísně vzato, jsou úplná v metrickém smyslu a skoro úplná ve smyslu uspořádání (je zde to proviso o neprázdné omezené množině; to se ale dá spravit zavedením $+\infty$ a $-\infty$).

Úplnost prostoru $(\mathbb{R}, |x-y|)$ je v Bolzano-Cauchyově větě.

Pozorování. *Každá Cauchyovská posloupnost je omezená.*

Důkaz. Vezměme n_0 takové aby pro $m, n \geq n_0$ bylo $|x_m - x_n| < 1$. Položme $K = \max\{|x_1 - x_n| \,|\, n \leq n_0\}$. Potom pro každé n je $|x_1 - x_n| < K + 1$.

Lemma. *Buď $(x_n)_n$ Cauchovská a nechť její podposloupnost $(x_{k_n})_n$ konverguje k x. Potom je $\lim_n x_n = x$.*

Důkaz. Pro $\varepsilon > 0$ zvolme n_1 tak aby pro $n \geq n_1$ bylo $|x_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, a n_2 tak aby pro $m, n \geq n_1$ bylo $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Jelikož $k_n \geq n$máme pak pro $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$, $|x_n - a| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Důsledek. (Bolzano-Cauchyova Věta) *Každá Cauchyovská posloupnost v $\mathbb{R}$ konverguje. Tedy je $\mathbb{R}$ úplný metrický prostor.*

Příklad:
Absolutně konvergentní řady.

Předpokládejme, že $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (třeba nechť $b_n = Bq^n$ pro nějaké $0 < q < 1$), a že $|a_n| \leq b_n$ pro všechna n. Potom pro částečné součty $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ a $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ máme

$$|s_m - s_n| = |\sum_{k=n+1}^{m} a_n| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_n| \leq$$
$$\leq \sum_{k=n+1}^{m} b_n = t_m - t_n.$$

$(t_n)_n$ konverguje, je tedy Cauchyovská, tedy $(s_n)_n$ je Cauchyovská, a tedy $(s_n)_n$ konverguje.

Takže víme, že

konečný součet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *existuje,*

aniž bychom měli předem tušení jaká jeho hodnota je.

Okolí, otevřené množiny.

$\Omega(x,\varepsilon) = \{y \mid d(x,y) < \varepsilon\}$

U je okolí bodu $x \equiv \exists\varepsilon, \Omega(x,\varepsilon) \subseteq U$

U je *otevřená* $\equiv U$ je okolí každého svého bodu.

Fakt. *Každá* $\Omega(x,\varepsilon)$ *je otevřená.*

(Je-li $y \in \Omega(x,\varepsilon)$ je $d(x,y) < \varepsilon$. Zvolme η, $0 < \eta < \varepsilon - d(x,y)$. Je-li $z \in \Omega(y,\eta)$ je $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \eta < \varepsilon$, takže $z \in \Omega(x,\varepsilon)$.)

Obraz a vzor.

$f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$,

$f^{-1}[B] = \{x \mid f(x) \in B\}$

Fakta. $f[A] \subseteq B \;\equiv\; A \subseteq f^{-1}[B]$,

$$f[f^{-1}[B]] \subseteq B, \quad A \subseteq f^{-1}[f[A]].$$

Věta. *Následující tvrzení o $f : X \to Y$ jsou ekvivalentní.*

(1) *f je spojitá.*

(2) *Pro každé $x \in X$ a každé okolí V bodu $f(x)$ existuje okolí U bodu x takové, že $f[U] \subseteq V$.*

(3) *Pro každou V otevřenou v Y je $f^{-1}[V]$ otevřená X.*

Důkaz. (1)$\Leftrightarrow$(2): $f[\Omega(x,\delta)] \subseteq \Omega(f(x),\varepsilon)$ říká přesně totéž jako že

$$d(x,y) < \delta \;\Rightarrow\; d(f(x),f(y)) < \varepsilon.$$

(2)$\Rightarrow$ (3): Buď V otevřená a buď $x \in f^{-1}[V]$. Potom $f(x) \in V$, V je okolí bodu $f(x)$ a existuje okolí U bodu x takové, že $f[U] \subseteq V$. Potom $x \in U \subseteq f^{-1}[V]$ a $f^{-1}[V]$ je okolí bodu x.

(3)$\Rightarrow$(2): Buď V okolí bodu $f(x)$, buď $f(x) \in W = \Omega(f(x),\varepsilon) \subseteq V$. W je otevřená, tedy je $U = f^{-1}[W]$ otevřená, $x \in U$, a $f[U] = f[f^{-1}[W]] \subseteq W \subseteq V$.

Homeomorfismus.

Spojité $f : (X,d) \to (Y,d')$ takové, že existuje spojité $g : (Y,d') \to (X,d)$ pro které

$$f \cdot g = \mathrm{id}_Y \quad \text{and} \quad g \cdot f = \mathrm{id}_X.$$

(Jako isomorfismy v algebrách a jinde).

Příklad.
$\tan : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$, $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi,\pi)$

Každý otevřený interval (omezený nebo neomezený) je homeomorfní s $\mathbb{R}$*.*

Ekvivalentní metriky d, d' na X:

$$\mathrm{id} : (X,d) \to (X,d') \text{ je homeomorfismus}$$

Příklad.
$d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ na $\mathbb{R}$ je ekvivalentní se standardní $|x-y|$.

Topologické pojmy: pojmy zachovávané při homeomorfismech;
na dané množině: nezávislé na volbě ekvivalentní metriky.

Příklady. Topologické:

spojitost

konvergence

okolí (třebaže $\Omega(x, \varepsilon)$ není)

otevřená množina

uzavřená množina

uzávěr

kompaktnost

Nejsou topologické:

omezenost

Cauchyova vlastnost

úplnost

(omezený otevřený interval (a, b) je omezený, $\mathbb{R}$ není. $\mathbb{R}$ je úplný, (a, b) není.)

Silně ekvivalentní metriky.

Silně ekvivalentní d, d' na X: existují $\alpha, \beta > 0$ takové, že

$$\forall x, y, \quad \alpha d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta d(x,y)$$

Silná ekvivalence zachovává i omezenost, Cauchyovu vlastnost a úplnost.

Speciálně jsou silně ekvivalentní metriky na $\mathbb{E}_n$

$$d((x_i)_i, (y_i)_i) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$$
$$\lambda((x_i)_i, (y_i)_i) = \sum_i |x_i - y_i|$$
$$\sigma((x_i)_i, (y_i)_i) = \max_i |x_i - y_i|.$$

Podobně je tomu s variantami vzdáleností v (konečných) součinech:

$$d((x_i)_i, (y_i)_i) = \sqrt{\sum_i d_i(x_i, y_i)^2}$$
$$\lambda((x_i)_i, (y_i)_i) = \sum_i d_i(x_i, y_i)$$
$$\sigma((x_i)_i, (y_i)_i) = \max_i d_i(x_i, y_i)$$

jsou silně ekvivalentní.

Zřejmě máme

$$\max_i d_i(x_i, y_i) \leq \sqrt{\sum_i d_i(x_i, y_i)^2}$$
$$\max_i d_i(x_i, y_i) \leq \sum_i d_i(x_i, y_i)$$
$$\sqrt{\sum_i d_i(x_i, y_i)^2} \leq \sqrt{n} \max_i d_i(x_i, y_i)$$
$$\sum_i d_i(x_i, y_i) \leq n \max_i d_i(x_i, y_i)$$

Reformulace kompaktnosti.
Hromadné body.

x je *hromadný bod* množiny M v (X,d) je li pro každé okolí U bodu x mnpžina $U \cap M$ nekonečná.
(Equivalentně, je-li v každém okolí U bodu x bod $y \neq x$.)

Tvrzení. (X,d) *je kompaktní právě když každá nekonečná* $M \subseteq X$ *má hromadný bod.*

Důkaz. I. Buď (X,d) kompaktní a $M \subseteq X$ nekonečná. Zvolme $(x_n)_n$ s $x_n \in M$ různými. Buď $(x_{k_n})_n$ konvergentní podposloupnost. Potom je $x = \lim_n x_{k_n}$ zřejmě hromadný bod množiny M.

II. Naopak buď $(x_n)_n$ posloupnost v X. Je-li $\{x_n \,|\, n = 1,2,\dots\}$ konečná, existuje konstantní podposloupnost. Jinak má $M = \{x_n \,|\, n = 1,2,\dots\}$ hromadný bod x, a každá $M \cap \Omega(x, \frac{1}{n})$ je nekonečná. Zvolme $x_{k_1} \in M \cap \Omega(x,1)$. Máme-li x_{k_1} s $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ takové že $x_{k_r} \in M \cap \Omega(x, \frac{1}{r})$ zvolme $x_{k_{n+1}} \in M \cap \Omega(x, \frac{1}{n+1})$ s $k_{n+1} > k_n$ (máme nekonečně mnoho možností). Potom je $\lim_n x_{k_n} = x$.

Podrobnosti.

Text:

Kapitola I, Sekce 2

Kapitola II, Sekce 3

Kapitola III, Sekce 2

Kapitola XIII, Sekce 2, 3, 4, 6 a 7