Opakování.

Stejnoměrná spojitost. $f : (X, d) \to (Y, d')$ je *stejnoměrně spojitá* jestliže

$\forall\varepsilon\exists\delta$ tak že $d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$

Přesněji, kvantifikujeme-li x a y:

$\forall\varepsilon\exists\delta$ t.ž. $\forall x \forall y\, d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$

Posice $\forall x$ je zásadní.

Prostá spojitost žádá

$$\forall x \forall\varepsilon\exists\delta \text{ t.ž. } \forall y \ \cdots$$

Stejnoměrná spojitost je silnější. Platí však

Věta. *Je-li (X, d) kompaktní, je každé spojité $f : (X, d) \to (Y, d')$ stejnoměrně spojité.*

Speciálně to platí pro spojité reálné funkce na kompaktních intervalech.

Objemy (obsahy) (pro $A \subseteq \mathbb{E}_n$)

Vlastnosti:

- $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \mathsf{vol}(A) \leq \mathsf{vol}(B)$
- A, B disjunktní $\Rightarrow \mathsf{vol}(A \cup B) = \mathsf{vol}(A) + \mathsf{vol}(B)$
- vol se zachovává při isometrii
- v $\mathbb{E}_n$:
  $\mathsf{vol}(\prod_i \langle a_i, b_i \rangle) = (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_n - a_n)$

Fakt. *Obecně platí*

$\mathsf{vol}(A \cup B) = \mathsf{vol}(A) + \mathsf{vol}(B) - \mathsf{vol}(A \cap B)$.

Objem stěn cihel je nula, tedy objem sjednocení cihel protínajících se jen ve stěnách je součet jejich objemů.

(Mluvíme o skoro disjunktnich sjednoceních.)

Riemannův integrál v jedné proměnné:

Rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$

$P: \ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$

Zjemnění.

Jemnost rozdělení P,

$$\mu(P) = \max_j (t_j - t_{j-1}).$$

Dolní a horní součty

$$s(f, P) = \sum_{j=1}^{n} m_j (t_j - t_{j-1}) \quad \text{resp.}$$

$$S(f, P) = \sum_{j=1}^{n} M_j (t_j - t_{j-1})$$

kde

$$m_j = \inf\{f(x) \,|\, t_{j-1} \le x \le t_j\},$$
$$M_j = \sup\{f(x) \,|\, t_{j-1} \le x \le t_j\}.$$

Dolní resp. *horní Riemannův integrál* funkce f

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \sup\{s(f,P) \mid P \text{ rozdělení}\} \quad \text{a}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \inf\{S(f,P) \mid P \text{ rozdělení}\}.$$

Jsou-li si rovny, společná hodnota

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$

je <u>Riemannův integrál funkce f přes $\langle a,b\rangle$</u>.

Je-li $f(x) \geq 0$ na $\langle a,b\rangle$, pak $\int_a^b f(x)dx$ *je objem (obsah) množiny*

$$\{(x,y) \mid a \leq x \leq b, x \leq y \leq f(x)\}$$

Tvrzení. *Riemannův integrál* $\int_a^b f(x)dx$ *existuje právě když pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje rozdělení* P *takové, že*

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon.$$

Věta. *Pro každou spojitou funkci* $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ *existuje Riemannův integrál* $\int_a^b f$.

Věta. (Integrální věta o střední hodnotě) *Nechť je* $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ *spojitá. Potom existuje* $c \in \langle a,b \rangle$ *takové, že*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Theorem. (Základní věta analysy) *Buď $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ spojitá. Pro $x \in \langle a, b\rangle$ položme*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Potom je $F'(x) = f(x)$.

Důsledky. 1. *Spojitá funkce $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ má na intervalu (a, b) primitivní funkci spojitou na $\langle a, b\rangle$. Pro kteroukoli primitivní funkci G funkce f na (a, b) spojitou na $\langle a, b\rangle$ platí*

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a).$$

2. (Integrální věta. o střední hodnotě)

$$F(b)-F(a) = \int_a^b f = f(c)(b-a) = F'(c)(b-a)$$

Riemannův integrál ve více proměnných.

V $\mathbb{E}_n$: *Kompaktní interval* (*n-rozměrný kompaktní interval*) je

$$J = \langle a_1, b_1\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle$$

(je skutečně kompaktní); krátce, *interval*, nebo *cihla*.

Rozdělení intervalu J je posloupnost $P = (P^1, \dots, P^n)$ rozdělení

$$P^j:\ a_j = t_{j0} < t_{j1} < \cdots < t_{j,n_j-1} < t_{j,n_j} = b_j,$$

Intervalům

$$\langle t_{1,i_1}, t_{1,i_1+1}\rangle \times \cdots \times \langle t_{n,i_n}, t_{n,i_n+1}\rangle$$

říkáme *cihly rozdělení* P, a

$$\mathcal{B}(P)$$

je množina všech cihel rozdělení P.
Je to *skoro disjunktní* rozklad intervalu J.

Různé cihly z $\mathcal{B}(P)$ se totiž zřejmě setkávají jen v podmnožinách okrajů, tedy v množinách objemu 0. Máme tedy

Pozorování.
$\mathsf{vol}(J) = \sum\{\mathsf{vol}(B) \mid B \in \mathcal{B}(J)\}.$

Jemnost rozdělení.
Diametr intervalu
$J = \langle r_1, s_1\rangle \times \cdots \times \langle r_n, s_n\rangle$ je

$$\mathsf{diam}(J) = \max_i (s_i - r_i)$$

Jemnost rozdělení P je

$$\mu(P) = \max\{\mathsf{diam}(B) \mid B \in \mathcal{B}(P)\}.$$

Zjemnění. Rozdělení $Q = (Q^1, \ldots, Q^n)$ *zjemňuje* rozdělení $P = (P^1, \ldots, P^n)$ jestliže každé Q^j zjemňuje P^j.

Pozorování. *Zjemnění Q rozdělení P vytváří rozdělení*

$$Q_B \quad cihel \quad B \in \mathcal{B}(P)$$

a máme skoro disjunktní sjednocení

$$\mathcal{B}(Q) = \bigcup \{\mathcal{B}(Q_B) \mid B \in \mathcal{B}(P)\}.$$

Pozorování. *Každá dvě rozdělení P, Q n-rozměrného kompaktního intervalu J mají společné zjemnění.*

Je dána omezená $f : J \to \mathbb{R}$ na n-rozměrném kompaktním intervalu J, a $B \subseteq J$ je n-rozměrný kompaktní podinterval intervalu J. Položme

$$m(f, B) = \inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in B\} \quad \text{a}$$
$$M(f, B) = \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in B\}.$$

Fakt. *$m(f, B) \leq M(f, B)$ a je-li $C \subseteq B$ je*

$$m(f, C) \geq m(f, B) \text{ a } M(f, C) \leq M(f, B).$$

Pro rozdělení P intervalu J a omezenou funkci $f : J \to \mathbb{R}$ definujme

$$s_J(f, P) = \sum\{m(f, B) \cdot \mathsf{vol}(B) \mid B \in \mathcal{B}(P)\},$$
$$S_J(f, P) = \sum\{M(f, B) \cdot \mathsf{vol}(B) \mid B \in \mathcal{B}(P)\}.$$

Obecné pozorování:
$f : X \to \mathbb{R}$ je omezená,
$X = \bigcup X_i$, $X_i = \bigcup X_{ij}$
jsou konečná skoro disjunktní sjednocení.

$$M_i = \sup\{f(x) \,|\, x \in X_i\},$$
$$M_{ij} = \sup\{f(x) \,|\, x \in X_{ij}\}$$

Triviálně: $M_{ij} \le M_i$
(M_i je horní mez množiny $\{f(x) \,|\, x \in X_{ij}\}$).

Tedy je

$$\sum_i M_i \mathsf{vol}(X_i) = \sum_i M_i \sum_j \mathsf{vol}(X_{ij}) =$$
$$= \sum_{ij} M_i \mathsf{vol}(X_{ij}) \ge \sum_{ij} M_{ij} \mathsf{vol}(X_{ij})$$

Podobně pro infima.

Tvrzení. *Nechť Q zjemňuje P. Potom*

$$s(f,Q) \geq s(f,P) \quad a \quad S(f,Q) \leq S(f,P).$$

Proof: Použijeme předchozí pozorování pro $\{X_i \,|\, i\} = \mathcal{B}(P)$, $\{X_{ij} \,|\, j\} = \mathcal{B}(Q_B)$, a samozřejmě i pro $\{X_{ij} \,|\, ij\} = \mathcal{B}(Q)$.

Tvrzení. *Pro libovolná dvě rozdělení P, Q intervalu J máme $s(f,P) \leq S(f,Q)$.*

Proof. Jelikož je triviálně $s(f,P) \leq S(f,P)$, použitím společného zjemnění R rozdělení P, Q dostaneme

$$s(f,P) \leq s(f,R) \leq S(f,R) \leq S(f,Q).$$

Tedy je množina $\{s(f,P) \mid P \text{ rozdělení}\}$ shora omezená a můžeme definovat *dolní Riemannův integrál* funkce f přes J jako

$$\underline{\int_J} f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \sup\{s(f,P) \mid P \text{ rozdělení}\};$$

podobně definujeme *horní Riemannův integrál*

$$\overline{\int_J} f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \inf\{S(f,P) \mid P \text{ rozdělení}\}.$$

Jsou-li si rovny, máme *Riemannův integrál funkce f přes J*; značení

$$\int_J f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} \quad \text{nebo prostě} \quad \int_J f$$

Jiné značení

$$\int_J f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1, \ldots x_n$$

nebo

$$\int_J f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

To dává víc smyslu než se na první pohled zdá.

Zde je zřejmý jednoduchý odhad:

$$\inf\{f(\mathbf{x}) \,|\, \mathbf{x} \in J\} \cdot \mathsf{vol}(J) \leq \underline{\int}_J f \leq$$

$$\leq \overline{\int}_J f \leq \sup\{f(\mathbf{x}) \,|\, \mathbf{x} \in J\} \cdot \mathsf{vol}(J).$$

Tvrzení. *Riemannův integrál* $\int_J f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ *existuje právě když pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje rozdělení* P *takové, že*

$$S_J(f, P) - s_J(f, P) < \varepsilon.$$

Uvědomte si jak snadné to je: nerovnost dává

$$S_J(f,P) < \varepsilon + s_J(f,P)$$

a z toho máme

$$\overline{\int} \leq S_J(f,P) < \varepsilon + s_J(f,P) \leq \varepsilon + \underline{\int} \leq \varepsilon + \overline{\int};$$

ε může být libovolně malé.

Theorem. *Každá spojitá funkce $f : J \to \mathbb{R}$ na n-rozměrném kompaktním intervalu má Riemannův integrál $\int_J f$.*

Důkaz. V $\mathbb{E}_n$ budeme užívat vzdálenost σ definovanou předpisem

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_i |x_i - y_i|.$$

Jelikož je f stejnoměrně spojitá můžeme pro $\varepsilon > 0$ zvolit $\delta > 0$ takové, že

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \frac{\varepsilon}{\mathsf{vol}(J)}.$$

Připomeňme si jemnost $\mu(P)$. Je-li $\mu(P) < \delta$ je $\mathsf{diam}(B) < \delta$ pro všechny $B \in \mathcal{B}(P)$ a tedy

$$\begin{aligned} M(f, B) - m(f, B) &= \sup\{f(\mathbf{x}) \,|\, \mathbf{x} \in B\} - \inf\{f(\mathbf{x}) \,|\, \mathbf{x} \in B\} \leq \\ &\leq \sup\{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \,|\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B\} < \frac{\varepsilon}{\mathsf{vol}(J)} \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} &S(f, P) - s(f, P) = \\ &\quad = \sum\{(M(f, B) - m(f, B)) \cdot \mathsf{vol}(B) \,|\, B \in \mathcal{B}(P)\} \leq \\ &\quad \leq \frac{\varepsilon}{\mathsf{vol}(J)} \sum\{\mathsf{vol}(B) \,|\, B \in \mathcal{B}(P)\} = \frac{\varepsilon}{\mathsf{vol} J} \mathsf{vol}(J) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Podrobnosti.

Text: Kapitola XVI, Sections 1,2,3
Kapitola XIII, 2.3