Opakování.

Obecná věta o implicitních funkcích.

Věta. *Buďte* $F_i(\mathbf{x}, y_1, \ldots, y_m)$, $i = 1, \ldots, m$, *funce v* $n + m$ *proměnných se spojitými parciálními derivacemi do řádu* $k \geq 1$. *Nechť je*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{o}$$

a

$$\frac{\mathsf{D}(\mathbf{F})}{\mathsf{D}(\mathbf{y})}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \neq 0.$$

Potom existují $\delta > 0$ *and* $\Delta > 0$ *takové, že pro každé*

$$\mathbf{x} \in (x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta) \times \cdots \times (x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta)$$

existuje právě jedno

$$\mathbf{y} \in (y_1^0 - \Delta, y_1^0 + \Delta) \times \cdots \times (y_m^0 - \Delta, x_m^0 + \Delta)$$

takové, že

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

(To jest,

$$\begin{aligned} &F_1(\mathbf{x}, y_1, \ldots, y_n) = 0, \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &F_n(\mathbf{x}, y_1, \ldots, y_n) = 0. \quad) \end{aligned}$$

Dále, píšeme=li toto $\mathbf{y}$ *jako vektorovou funkci* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$, *mají funkce* f_i *spojité parciální derivace do řádu* k.

Jacobiho determinant.

Pro

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (F_1(\mathbf{x}, y_1, \ldots, y_m), \ldots, F_m(\mathbf{x}, y_1, \ldots, y_m)).$$

a $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$:
Jacobiho determinant (*Jacobián*) je

$$\frac{\mathsf{D}(\mathbf{F})}{\mathsf{D}(\mathbf{y})} = \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right)_{i,j=1,\ldots,m}$$

Připomeňme, že:
(Absolutní hodnota0 the determinant(u)

$$\left| \begin{matrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ \ldots, \ldots, \ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn} \end{matrix} \right| \neq 0.$$

je objem rovnoběžnostěnu určeného vectory $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$,...,

$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$.

Tedy Jacobián popisuje lokální změny objemu při transformaci zobrazením $\mathbf{F}(\mathbf{x}, -)$.

Aplikace: Vázané extrémy.

Věta. *Buďte* $f, g_1, \ldots, g_k$ *reálné funkce definované na otevřené množině* $D \subseteq \mathbb{E}_n$*; nechť mají spojité parciální derivace. Předpokládejme, že hodnost matice*

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

je maximální možná, t.j, k*, všude v* D*.*

Nabývá-li funkce f *v bodě* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ *lokálního extrému podmíněného vazbami*

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$

existují čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *taková, že pro každé* $i = 1, \ldots, n$ *je*

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} = 0.$$

Princip důkazu (jak aplikujeme větu o IF):

Nechť je třebakrajní čtvercová matice podmatice of M regulární. Máme tedy

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}, & \dots, & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \\ \dots, & \dots, & \dots \\ \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1}, & \dots, & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_k} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (*)$$

Chápejme vazby $(k < n)$

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$
$$\dots \ \dots \ \dots$$
$$g_k(x_1, \dots, x_n) = 0$$

jako úlohu o implicitních funkcích

$$g_i(\overbrace{x_1, \dots, x_k}^{\mathbf{y}}, x_{k+1}, \dots, x_n) = 0, \ i = 1, \dots, k$$

Potom $(*)$ říká, že $\frac{\mathsf{D}(\mathbf{g})}{\mathsf{D}(\mathbf{y})} \neq 0$ a pro $i \leq k$ máme $x_i = \phi_i(x_{k+1}, ..., x_n)$ kde již se proměnné $\widetilde{\mathbf{x}} = x_{k+1}, ..., x_n$ volně pohybují v

$$F(x_{k+1}, \dots, x_n) = f(\phi_1(\widetilde{\mathbf{x}}), \dots, \phi_k(\widetilde{\mathbf{x}}), \widetilde{\mathbf{x}}).$$

Zbytek je řetízkové pravidlo a lineární algebra and linear algebra (a jednoduché vyhledávání lokálního extrému pomocí nulových parciálních derivací).

Regulární zobrazení.

Pro otevřenou $U \subseteq \mathbb{E}_n$ a

$$f_i : U \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

řekneme, že vzniklé zobrazení

$$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{E}_n$$

je *regulární* jestliže

$$\frac{\mathsf{D}(\mathbf{f})}{\mathsf{D}(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \neq 0$$

pro všechna $\mathbf{x} \in U$.

Tvrzení. *Je=li* $\mathbf{f} : U \to \mathbb{E}_n$ *regulární poton obraz* $\mathbf{f}[V]$ *každé otevřené* $V \subseteq U$ *je otevřený.*

Tvrzení. *Buď* $\mathbf{f} : U \to \mathbb{E}_n$ *regulární. Potom pro každé* $\mathbf{x} \in U$ *existuje otevřené okolí* V *takové, že restrikce* $\mathbf{f}|V$ *je prostá. Navíc, zobrazení* $\mathbf{g} : f[V] \to \mathbb{E}_n$ *inversní k* $\mathbf{f}|V$ *je regulární.*

Důsledek. *Prosté regulární zobrazení* $\mathbf{f} : U \to \mathbb{E}_n$ *má regulární inversi* $\mathbf{g} : \mathbf{f}[U] \to \mathbb{E}_n$.

Objemy (obsahy).

$A \subseteq \mathbb{E}_n$ (speciálně, $\mathbb{E}_2$)

Vlastnosti:

- $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \mathsf{vol}(A) \leq \mathsf{vol}(B)$
- A, B disjunktní $\Rightarrow \mathsf{vol}(A \cup B) = \mathsf{vol}(A) + \mathsf{vol}(B$
- vol je zachován isometrií.

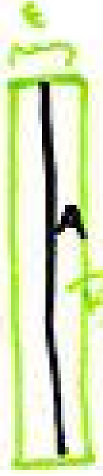
- V $\mathbb{E}_2$:
  $\mathsf{vol}(\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
- V $\mathbb{E}_n$:
  $\mathsf{vol}(\prod_i \langle a_i, b_i \rangle) = (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_n - a_n)$

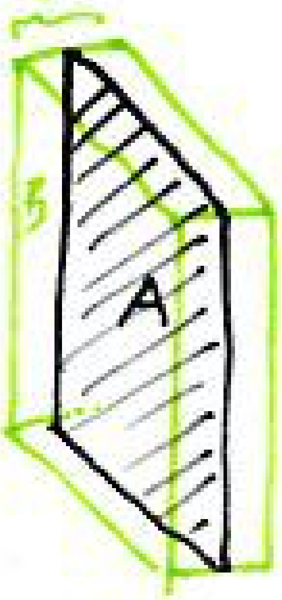
Fakt. Obecně platí

$$\mathsf{vol}(A \cup B) = \mathsf{vol}(A) + \mathsf{vol}(B) - \mathsf{vol}(a \cap B).$$

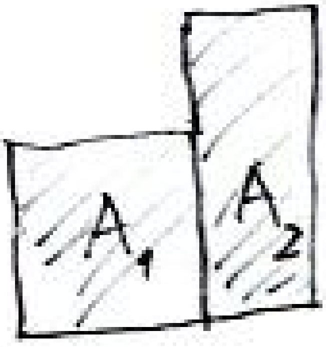
(Kombinujme disjunktní sjednocení $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$

a $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$.)

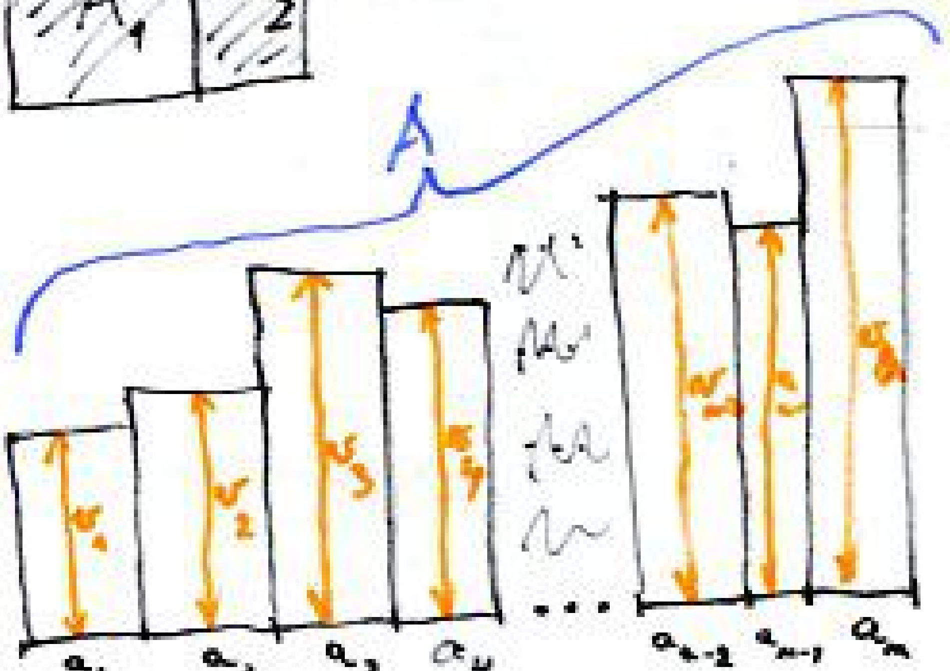




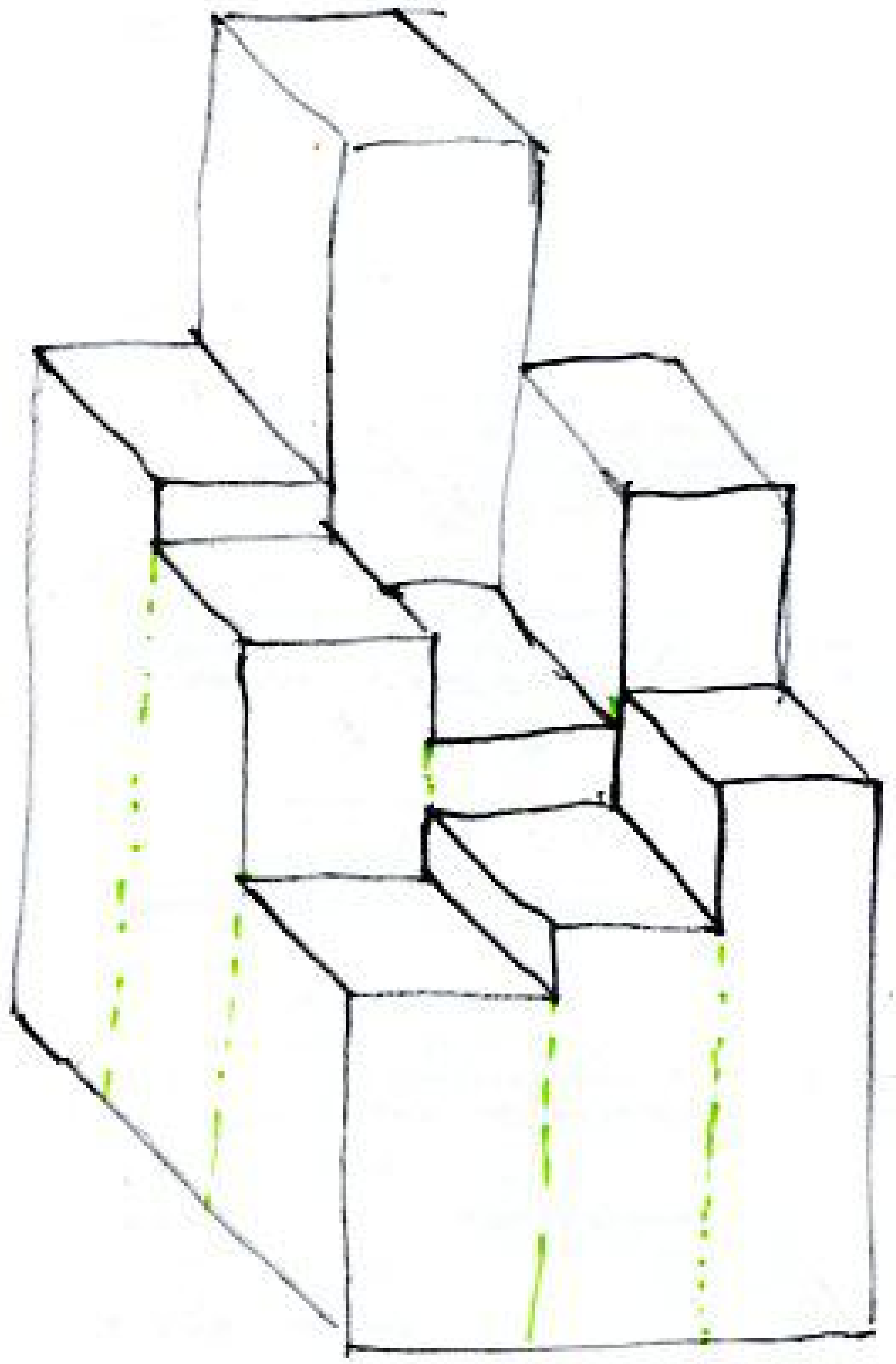
$$\mathrm{vol}(A) \leq \mathrm{vol}(B) = \begin{cases} a \cdot \varepsilon \\ a_1 \cdot a_2 \cdot \varepsilon \end{cases}$$



$$\mathrm{vol}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{vol}\, A_1 + \mathrm{vol}\, A_2$$



$$\mathrm{vol}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$



Stejnoměrná spojitost. $f : (X, d) \to (Y, d')$ je *stejnoměrně spojité* je-li

$$\forall \varepsilon \exists \delta \text{ s.t. } d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Srovnejte s obyčejnou spojitostí: Kvantifikujeme-li důsledně body x, y, obyčejná spojitost je dána formulí

$$\forall x \forall \varepsilon \exists \delta \text{ takové, že } \forall y \; d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

atím co ta nová stejnoměrná spojitost má

$$\forall \varepsilon \exists \delta \text{ s.t. } \forall x \forall y \; d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

posice kvantifikátoru $\forall x$ je zásadně důležitá !

Příklad. $f = (x \mapsto x^2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá, ale ne stejnoměrně spojitá.

Máme $|f(x) - f(y)| = |x + y| \cdot |x - y|$; tedy, abychom dostali $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ v blízkosti $x = 100$ potřebujeme δ 100krát menší než v blízkosti $x = 1$.

Platí však

Věta. *Je-li (X,d) kompaktní, je každé spojité $f:(X,d)\to(Y,d')$ stejnoměrně spojité.*

Zejména to platí pro spojité reálné funkce na kompaktních intervalech.

Důkaz. Nechť $f:(X,d)\to(Y,d')$ není stejnoměrně spojité. Potom existuje $\varepsilon>0$ takové, že Pro každé n existují x_n, y_n pro které

$$d(x_n,y_n)<\frac{1}{n} \qquad (*)$$

ale

$$d'(f(x_n),f(y_n))\geq\varepsilon. \qquad (**)$$

Zvolme konvergentní podposloupnost $(x_{k_n})_n$ posloupnosti $(x_n)_n$. Označme $a=\lim_n x_{k_n}$. Potom podle $(*)$ je též $a=\lim_n y_{k_n}$. Podle $(**)$ nemůže být $f(a)=\lim_n f(x_{k_n})$ a zároveň $f(a)=\lim_n f(y_{k_n})$, a tedy f není ani spojité.

Riemannův integrál v jedné proměnné, rekapitulace.

Rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$: posloupnost

$$P: \ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Zjemnění:

$$P': \ a = t'_0 < t'_1 < \cdots < t'_{n-1} < t_m = b$$

kde $\{t_j \,|\, j = 1, \ldots, n-1\} \subseteq \{t'_j \,|\, j = 1, \ldots, m-1\}$.

Jemnost rozdělení P: $\mu(P) = \max_j(t_j - t_{j-1})$.

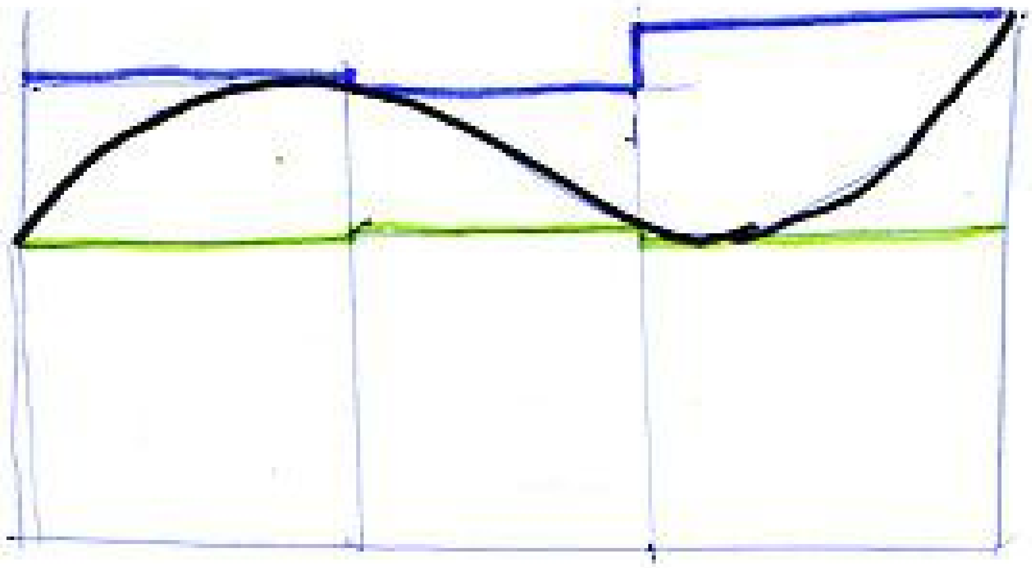
Pro omezenou $f : J = \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ a P jako nahoře definujeme dolní a horní součty

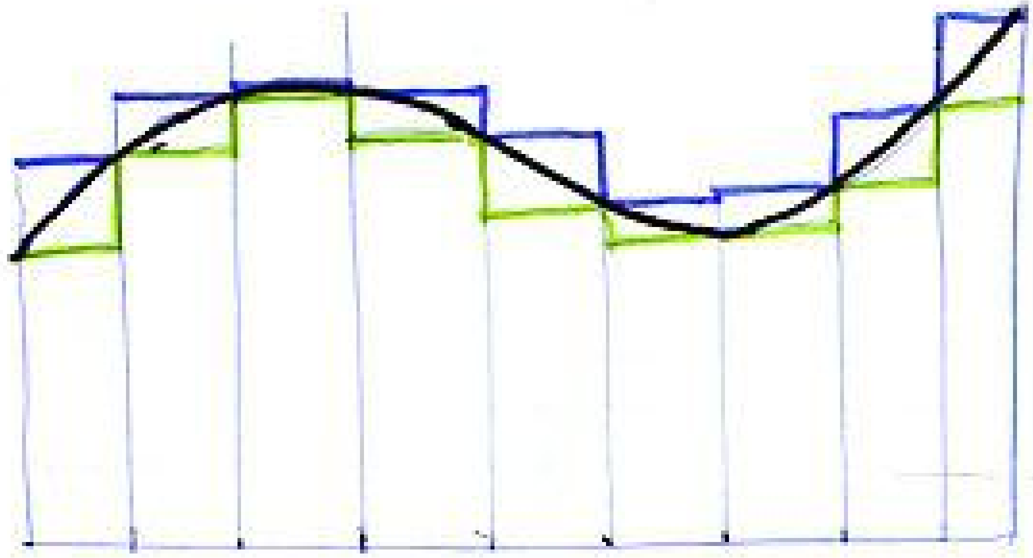
$$s(f, P) = \sum_{j=1}^{n} m_j(t_j - t_{j-1}) \quad \text{resp.}$$

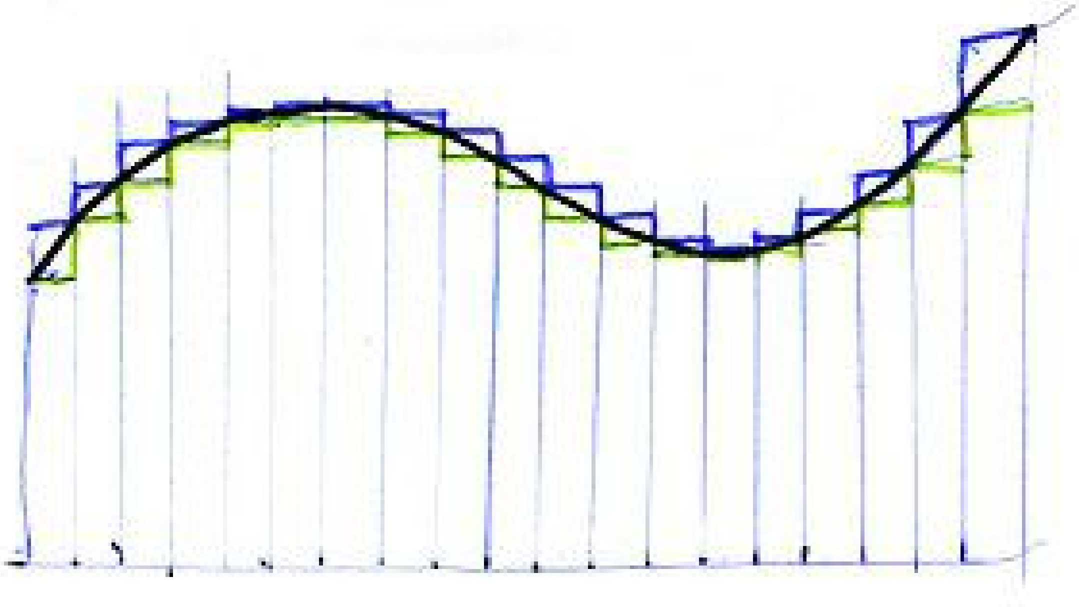
$$S(f, P) = \sum_{j=1}^{n} M_j(t_j - t_{j-1})$$

kde

$m_j = \inf\{f(x) \,|\, t_{j-1} \le x \le t_j\}, M_j = \sup\{f(x) \,|\, t_{j-1} \le x \le t_j\}$.







Jednoduchá fakta. 1. *Pokud P' zjemňuje P máme*

$$s(f,P) \le s(f,P') \quad a \quad S(f,P) \ge S(f,P')$$

2. *Pro každá dvě P_1, P_2 je*

$$s(f,P_1) \le S(f,P_2).$$

Integrál.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \sup\{s(f,P) \mid P \text{ rozdělení}\} \text{ a}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \inf\{S(f,P) \mid P \text{ rozdělení}\}.$$

Prvnímu se říká *dolní Riemannův integrál* f přes $\langle a,b\rangle$, druhé je *horní Riemannův integrál.*

Je-li $\underline{\int}_a^b f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int}_a^b f(x)\mathrm{d}x$ označujeme společnou hodnotu

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

a říkáme jí *Riemannův integrál* funkce f přes $\langle a, b\rangle$.

Tvrzení. *Riemannův integrál $\int_a^b f(x)dx$ existuje právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje rozdělení P takové, že*

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon.$$

Důkaz. I. Nechť $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ existuje a nechť $\varepsilon > 0$. Potom existují rozdělení P_1 a P_2 taková, že

$$S(f,P_1) < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad s(f,P_2) > \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Potom je pro společné zjemněníP těch dvou P_1, P_2,

$$S(f,P) - s(f,P) < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

II. Nechť druhé tvrzení platí. Zvolme $\varepsilon > 0$ takové, že $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$. Potom je

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \le S(f,P) < s(f,P) + \varepsilon \le \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon,$$

a jelikož ε bylo libovolně malé vidíme, že $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$.

Věta. *Pro každou spojitou $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ Riemannův integrál $\int_a^b f$ existuje.*

Důkaz. Pro $\varepsilon > 0$ zvolme $\delta > 0$ tak, aby

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Je-li $\mu(P) < \delta$ máme $t_j - t_{j-1} < \delta$ pro všechna j, a tedy

$$\begin{aligned} M_j - m_j &= \sup\{f(x) \,|\, t_{j-1} \le x \le t_j\} - \inf\{f(x) \,|\, t_{j-1} \le x \le t_j\} \le \\ &\le \sup\{|f(x) - f(y)| \,|\, t_{j-1} \le x, y \le t_j\} \le \frac{\varepsilon}{b-a} \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,P) &= \sum (M_j - m_j)(t_j - t_{j-1}) \le \\ &\le \frac{\varepsilon}{b-a} \sum (t_j - t_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Věta. (Integrální v. o střední hodnotě) *Buď $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ spojitá. Potom existuje $c \in \langle a, b\rangle$ takové, že*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Důkaz. Položme $m = \min\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$ a $M = \max\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$. Zřejmě je

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

Existuje tedy K takové, že $m \leq K \leq M$ a $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = K(b-a)$. Jelikož je f spojitá, existuje $c \in \langle a, b\rangle$ takové, že $K = f(c)$.

Pozorování. *Pro $a < b < c$ je*

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f.$$

Věta. (Základní věta analysy) *Buď $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ spojitá. Pro $x \in \langle a, b\rangle$ definujme*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Potom je $F'(x) = f(x)$.

Důkaz. Pro $h \neq 0$ máme

$$\frac{1}{h}(F(x+h) - f(x)) = \frac{1}{h}(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f) =$$
$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f = \frac{1}{h}f(x+\theta h)h = f(x+\theta h)$$

kde $0 < \theta < 1$ a jelikož je f is spojitá, je $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(F(x+h) - f(x)) = \lim_{h\to 0} f(x+\theta h) = f(x)$.

Důsledek. *Buď* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *spojitá. Potom má primitivní funkci na* (a, b) *spojitou na* $\langle a, b\rangle$. *Je-li* G *primitivní funkce* f *na* (a, b) *spojitá na* $\langle a, b\rangle$ *potom je*

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a).$$

.

Podrobnosti

Text: Kapitola XI, Sekce 1, 2, 3 a 4.