Opakování.

Kompaktní prostor: každá $(x_n)_n$ v (X,d) má konvergentní podposloupnost.

Z minulého semestru: $\langle a,b\rangle$ je kompaktní, odtud "kompaktní interval"

Uzavřený podprostor kompaktního je kompaktní.

Omezenost. Produkty kompaktních.

Podprostor $\mathbb{E}_n$ je kompaktní právě když je uzavřený a omezený.

Obraz kompaktní podmnožiny při spojitém zobrazení je kompaktní.

Důsledek. *Spojitá reálná funkce na kompaktním prostoru nabývá maxima i iminima.*

(kompaktní $M \subseteq \mathbb{R}$ má největší a nejmenší prvek, je totiž omezená a uzavřená)

Kompaktní podmnožina libovolného metrického prostoru je uzavřená.

Důsledek. *Je-li x kompaktní a* $f : X \to Y$ *spojité, je pro každou uzavřenou* $A \subseteq X$ *obraz* $f[A]$ *uzavřený v* Y.

Co je na tom zvláštní.

Cauchyovská posloupnost. Konvergentní je Cauchyovská.

Úplný prostor. $\mathbb{R}$ je úplný.

Součin úplných je úplný. $\mathbb{E}_n$ je úplný.

Podprostor $\mathbb{E}_n$ je úplný právě když je uzavřený.

Každý kompaktní prostor je úplný.

Věty o implicitních funkcích.

Úloha: Jsou dány spojité reálné funkce $F_i(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n), i=1,\dots,n$ v $n+m$ proměnných. Určuje systém rovnic

$$F_1(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)=0,$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$F_n(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)=0$$

v nějakém smyslu funkce

$$f_i \equiv y_i(x_1,\dots,x_m),\ i=1,\dots,n,$$

jak, kde, a jaké mají vlastnosti?

Ujasněme si to na $F(x,y)=x^2+y^2-1$, tedy na rovnici

$$x^2+y^2=1$$

(MA5pic1)

Několik pozorování:

– pro některá x_0 jako $x_0 < -1$ ve čtverečku nalevo, řešení $F(x_0, y) = 0$ neexistuje, o funkci $y(x)$ v okolí nemluvě;

– i když řešení vnějakém okolí x_0 existuje, nemůžeme někdy v takovém okolí x_0 mluvit o funkci. Potřebujeme "okénko" kolem řešení (x_0, y_0) vymezující nejen okolí x_0 ale také okolí y_0;

– a máme též případy jako ten s $x_0 = 1$ kde je v okolí spousta řešení ale žádné, ani jednostranné, okénko kde by y bylo jednoznačné.

V případě funkce $F(x,y)$ se už nic jiného nestane. Platí

Věta. *Buď $F(x,y)$ reálná funkce definovaná v nějakém okolí bodu (x_0,y_0). Nechť má F spojité parciální derivace do řádu $k \geq 1$ a nechť je*

$$F(x_0,y_0) = 0 \quad a \quad \left|\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\right| \neq 0.$$

Potom existují $\delta > 0$, $\Delta > 0$ takové, že ke každému $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ existuje právě jedno $y \in (y_0-\Delta, y_0+\Delta)$ splňující

$$F(x,y) = 0.$$

Dále, označíme-li toto jediné y jako $y = f(x)$ potom získaná
$f : (x_0-\delta, x_0+\delta) \to \mathbb{R}$ má spojité derivace do řádu k.

Buď třeba

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} > 0.$$

$\frac{\partial F}{\partial y}$ jsou spojité, $A(\delta) = \{x \,|\, |x - x_0| \le \delta\}$ je uzavřená a omezená, tedy kompaktní, a existují $a > 0$, K, $\delta_1 > 0$ and $\Delta > 0$ takové, že pro $(x, y) \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times \langle y_0 - \Delta, y_0 + \Delta \rangle$ máme

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \ge a \quad \text{a} \quad \left| \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right| \le K. \tag{$*$}$$

Funkce f: pro pevné $x \in U(\delta_1) = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ definujme funkci φ_x na $y \in (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta)$ předpisem

$$\varphi_x(y) = F(x, y).$$

Potom je $\varphi_x'(y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} > 0$ a tedy *všechny* $\varphi_x(y)$ *rostou v* y, *a*

$$\varphi_{x_0}(y_0 - \Delta) < \varphi_{x_0}(y_0) = 0 < \varphi_{x_0}(y_0 + \Delta).$$

F je spojitá, a tedy pro nějaké δ, $0 < \delta \leq \delta_1$,

$$\forall x \in U(\delta), \quad \varphi_x(y_0 - \Delta) < 0 < \varphi_x(y_0 + \Delta).$$

φ_x roste a tedy je prostá, takže existuje právě jedno. $y \in (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta)$ takové, že $\varphi_x(y) = 0$ – to jest, $F(x, y) = 0$. Označme toto y jako $f(x)$.

(MA5pic2)

Vlastnosti funkce f: (všimněte si, že zatím nevíme ani zda f je spojitá.)

Podle Lagrangeovy věty je

$$0 = F(t+h, f(t+h)) - F(t, f(t)) =$$
$$= F(t+h, f(t) + (f(t+h) - f(t))) - F(t, f(t)) =$$
$$= \frac{\partial F(t+\theta h, f(t) + \theta(f(t+h) - f(t)))}{\partial x} h$$
$$+ \frac{\partial F(t+\theta h, f(t) + \theta(f(t+h) - f(t)))}{\partial y} (f(t+h) - f(t))$$

takže

$$f(t+h) - f(t) = -h \cdot \frac{\dfrac{\partial F(t+\theta h, f(t) + \theta(f(t+h) - f(t)))}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(t+\theta h f(t) + \theta(f(t+h) - f(t)))}{\partial y}} \qquad (*)$$

pro nějaké θ mezi 0 a 1.Tedy

$$|f(t+h) - f(t)| \leq |h| \cdot \left| \frac{K}{a} \right|$$

a f je spojitá, a dále z $(*)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = -\frac{\dfrac{\partial F(t, f(t))}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(t, f(t))}{\partial y}}$$

Máme tedy

$$f'(t) = -\frac{\dfrac{\partial F(t, f(t))}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(t, f(t))}{\partial y}}$$

a tuto formuli můžeme nyní derivovat tak dlouho, jak to existence parciálních derivací na pravé straně dovolí.

Poznámka. Funkci f můžeme derivovat dokud máme parciální derivace F. Ale pozor: aspoň první derivace tu být musí (viz $k \geq 1$ ve formulaci věty). $\frac{\partial F}{\partial y}$ jsme potřebovali již kvůli existenci f.

V f byla jen jedna proměnná ($m = 1$ v zadání problému) jen kvůli snadnějšímu zápisu. Stejnou úvahou se dokáže

Věta. *Buď $F(\mathbf{x}, y)$ funkce $m+n$ proměnných definovaná v okolí bodu $(\mathbf{x}^0, y_0)$. Nechť má F spojité parciální derivace do řádu $k \geq 1$ a nechť*

$$F(\mathbf{x}^0, y_0) = 0 \quad a \quad \left|\frac{\partial F(\mathbf{x}^0, y_0)}{\partial y}\right| \neq 0.$$

Potom existují $\delta > 0$ a $\Delta > 0$ takové, že pro každý $\mathbf{x}$ s $||\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|| < \delta$ existuje přesně jedno y s $|y - y_0| < \Delta$ takové, že

$$F(\mathbf{x}, y) = 0.$$

Dále, píšeme-li $y = f(\mathbf{x})$ pro toto jednoznačné řešení y, má funkce

$$f : (x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta) \times \cdots \times (x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta) \to \mathbb{R}$$

spojité parciální derivace do řádu k.

Dvě rovnice.

Uvažujme dvojici rovnic

$$F_1(\mathbf{x}, y_1, y_2) = 0,$$
$$F_2(\mathbf{x}, y_1, y_2) = 0$$

a pokusme se najít řešení $y_i = f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$, v nějakém okolí bodu $(\mathbf{x}^0, y_1^0, y_2^0)$. Aplikujme větu o jedné rovnici. Mysleme o druhé z rovnic jako o rovnici pro y_2; v nějakém okolí bodu $(\mathbf{x}^0, y_1^0, y_2^0)$ získáme y_2 jako funkci $\psi(\mathbf{x}, y_1)$. Substituujme ji do první rovnice, což dá

$$G(\mathbf{x}, y_1) = F_1(\mathbf{x}, y_1, \psi(\mathbf{x}, y_1));$$

a řešení $y_1 = f_1(\mathbf{x})$ v nějakém okolí bodu $(\mathbf{x}^0, y_1^0)$ může být substituováno do ψ a získáme $y_2 = f_2(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}, f_1(\mathbf{x}))$.

Co jsme vlastně předpokládali:
– spojité parciální derivace funkcí F_i.
– Potom, abychom získali ψ jsme potřebovali

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_2}(\mathbf{x}^0, y_1^0, y_2^0) \neq 0. \qquad (*)$$

– Konečně jsme potřebovali (použijte řetízkové pravidlo)

$$\frac{\partial G}{\partial y_1}(\mathbf{x}^0, x^0) = \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial \psi}{\partial y_1} \neq 0. \qquad (**)$$

Užijme formuli kterou již máme,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1} = -\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\right)^{-1} \frac{\partial F_2}{\partial y_1},$$

což transformuje $(**)$ na

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\right)^{-1} \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial F_2}{\partial y_2} - \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\right) \neq 0.$$

to jest,
$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial F_2}{\partial y_2} - \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial F_2}{\partial y_1} \neq 0.$$
To je vzorec který známe, totiž determinant. Takže jsme vlastně předpokládali, že

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right)_{i,j} \neq 0.$$

(A tato podmínka již stačí: není-li tento determinant nula, je *buď*
$$\frac{\partial F_2}{\partial y_2}(\mathbf{x}^0, y_1^0, y_2^0) \neq 0$$
a/nebo
$$\frac{\partial F_2}{\partial y_1}(\mathbf{x}^0, y_1^0, y_2^0) \neq 0.$$
Platí-li tedy to druhé, můžeme začít řešením rovnice $F_2(\mathbf{x}, y_1, y_2) = 0$ pro y_1 místo y_2.)

Podrobnosti.

Text: Kapitola XV, sekce 1,2 a 3