Opakování.

Totální diferenciál:

μ spojitá v okolí U bodu $\mathbf{o}$ taková, že $\mu(\mathbf{o}) = 0$,

a čísla $A_1, \ldots, A_n$ pro která

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} A_k h_k + \|\mathbf{h}\|\mu(\mathbf{h})$$

Implikuje to parciální derivace, ale ne naopak

plyne ze <u>spojitých</u> parciálních derivací.

Interpretace:

Tečná nadrovina.

Aproximace.

Počítání: aritmetická pravidla jako pro obyčejné derivace,

Řetězové Pravidlo. *Nechť má* $f(\mathbf{x})$ *totální diferenciál v bodě* $\mathbf{a}$. *Nechť mají funkce* $g_k(t_1, \ldots, t_r)$ *parciální derivace v* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_r)$ *a nechť je* $g_k(\mathbf{b}) = a_k$ *pro* $k = 1, \ldots, n$. *Potom má funkce* $(f \circ \mathbf{g})(t_1, \ldots, t_r) = f(\mathbf{g}(\mathbf{t})) = f(g_1(\mathbf{t}t), \ldots, g_n(\mathbf{t}))$ *všechny parciální derivace v* $\mathbf{b}$, *a platí*

$$\frac{\partial(f \circ \mathbf{g})(\mathbf{b})}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g_k(\mathbf{b})}{\partial t_j}.$$

Při skládání

$$\mathbb{E}_k \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{E}_n \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbb{E}_m$$

máme

$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) = D\mathbf{f} \cdot D\mathbf{g}$$

kde $D\mathbf{h} = \left(\frac{\partial h_i(\mathbf{a})}{\partial x_k}\right)_{ik}$

Lagrange v několika proměnných.

Tvrzení. *Nechť má f spojité parciální derivace v konvexní otevřené množině $U \subseteq \mathbb{E}_n$. Potom pro libovolné dva body $x, y \in D$ existuje θ, $0 \leq \theta \leq 1$, takové, že*

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{y} - \mathbf{x}))}{\partial x_j}(y_j - x_j).$$

Často se s tím setkáváme ve tvaru

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x} + \theta\mathbf{h})}{\partial x_j} h_j.$$

Parciální derivace jako funkce

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : D' \to \mathbb{R},$$

parciální derivace vyšších řádů

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_l}, \quad \frac{\partial^r f(\mathbf{x})}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \dots \partial x_{k_r}},$$

parciální derivace řádu r.

Řád je dán tím, kolikrát derivujeme,

$$\frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x \partial y \partial z} \quad \text{a} \quad \frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x \partial x \partial x}$$

jsou derivace třetího řádu.

Derivování podle téže proměnné těsně za sebou se píše jako exponent, např.

$$\frac{\partial^5 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y^3} = \frac{\partial^5 f(x,y)}{\partial x \partial x \partial x \partial y \partial y}, \quad \frac{\partial^5 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^5 f(x,y)}{\partial x \partial x \partial y \partial y \partial x}.$$

Tvrzení. *Buď $f(x,y)$ funkce taková, že parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ jsou definovány a jsou spojité v nějakém okolí bodu (x,y). Potom máme*

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}.$$

Věta. *Nechť má funkce f v n proměnných spojité parciální derivace do řádu k. Potom hodnoty těchto derivací záleží jen na tom kolikrát bylo derivováno v každé z individuálních proměnných .*

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \ldots \partial x_n^{r_n}} \quad \text{kde} \quad r_1 + r_2 + \cdots + r_n = r$$

($r_j = 0$ indikuje absenci symbolu ∂x_j).

Vzpomínky na předchozí semestr

V dalším budeme potřebovat zase něco víc z metrických prostorů, zejména něco o kompaktnosti a úplnosti. Připomeňte si chování kompaktních (uzavřených omezených) intervalů, zejména to, že

- v nich má každá posloupnost konvergentní podposloupnost, a jsou to jediné z intervalů, pro které to platí,
- a že na nich každá spojitá funkce nabývá maxima a minima.

Podrobněji:

Supremum množiny M :

(1) pro každé $x \in M$ je $x \leq s$, a

(2) je-li $x \leq y$ pro všechna $x \in M$ je $s \leq y$.

Pro lineární $\leq$ ekvivalentní s

(1) pro každé $x \in M$ je $x \leq s$, a

(2) je-li $y < s$ pak existuje $x \in M$ takové, že $y < x$.

Věta. *Z každé posloupnosti na kompaktním intervalu je možno vybrat konvergentní podposloupnost.*

Explicite: Nechť a, b jsou reálná čísla taková, že $a \leq x_n \leq b$ pro všechna n. Potom existuje podposloupnost $(x_{k_n})_n$ posloupnosti $(x_n)_n$ která konverguje v $\mathbb{R}$, a platí $a \leq \lim_n x_{k_n} \leq b$.

Důkaz. Vezměme

$$M = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \leq x_n \text{ pro nekonečně mnoho } n\}$$

M je neprázdná omezená protože $a \in M$ a b je horní mez M. Musí tedy existovat $s = \sup M$ a platí $a \leq s \leq b$.

$M = \{x \,|\, x \in \mathbb{R},\ x \leq x_n$ pro nekonečně mnoho $n\}$.

Pro každé n je množina

$$K(n) = \{k \,|\, s - \frac{1}{n} < x_k < s + \frac{1}{n}\}$$

nekonečná: skutečně, máme $x > s - \varepsilon$ takové, že $x_n > x$ pro nekonečně mnoho n, zatím co podle definice množiny M je jen konečně mnoho n takových, že $x_n \geq s + \varepsilon$.

Zvolme k_1 tak aby

$$s - 1 < x_{k_1} < s + 1$$

. Mějme zvolena $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ taková, že $j = 1, \ldots, n$

$$s - \frac{1}{j} < x_{k_j} < s + \frac{1}{j}.$$

Jelikož $K(n+1)$ je nekonečná, můžeme zvolit $k_{n+1} > k_n$ tak aby

$$s - \frac{1}{n+1} < x_{k_{n+1}} < s + \frac{1}{n+1}.$$

Takto zvolená podposloupnost $(x_{k_n})_n$ naší $(x_n)_n$ zřejmě konverguje k s.

Kompaktní prostory.

Metrický prostor (X, d) je *kompaktní* obsahuje-li v něm každá posloupnost konvergentní podposloupnost.

Tvrzení. *Poprostor kompaktního prostoru je kompaktní právě když je uzavřený.*

Důkaz. I. Buď Y uzavřený podprostor kompaktního X a buď $(y_n)_n$ posloupnost v Y. Jako posloupnost v X má podposloupnost s limitou, a z uzavřenosti je tato limita v Y.

II. Nechť Y není uzavřená. Potom existuje posloupnost $(y_n)_n$ v Y konvergentní v X taková,že $y = \lim_n y_n \notin Y$. Potom $(y_n)_n$ nemůže mít podposloupnost konvergentní v Y protože každá její podposloupnost konverguje k y. $\square$

Tvrzení. *Buď* (X, d) *libovolný a nechť je podprostor* Y *prostoru* X *kompaktní. Potom je* Y *uzavřený v* (X, d).

Důkaz. Nechť $(y_n)_n$ posloupnost v Y konverguje v X k limitě y. Potom každá podposloupnost $(y_n)_n$ konverguje k y a tedy je $y \in Y$.

Metrický prostor (X, d) je *omezený* jestliže pro nějaké K platí, že

$$\forall x, y \in X, \quad d(x, y) < K.$$

Tvrzení. *Každý kompaktní prostor je omezený.*

Důkaz. Zvolme x_1 libovolně a x_n tak aby $d(x_1, x_n) > n$. Posloupnost $(x_n)_n$ nemá konvergentní podposloupnost: kdyby x byla limita takové podposloupnosti bylo by pro dost velké n nekonečně mnoho členů této podposloupnosti blíže k x_1 než $d(x_1, x_n) + 1$, spor.

Věta. *Součin konečně mnoha kompaktních prostorů je kompaktní.*

Důkaz. Stačí dokázat pro součin dvou prostorů.

Buďte (X, d_1), (Y, d_2) kompaktní a buď $((x_n, y_n))_n$ posloupnost v $X \times Y$. Zvolme konvergentní podposloupnost $(x_{k_n})_n$ posloupnosti $(x_n)_n$ a konvergentní podposloupnost $(y_{k_{l_n}})_n$ posloupnosti$(y_{k_n})_n$. Potom je

$$((x_{k_{l_n}}, y_{k_{l_n}}))_n$$

konvergentní podposloupnost posloupnosti $((x_n, y_n))_n$.

Kompaktní interval v $\mathbb{E}_n$:
součin intervalů $\langle a_i, b_i\rangle$

Věta. *Podprostor euklidovského prostoru $\mathbb{E}_n$ je kompaktní právě když je omezený a uzavřený.*

Důkaz. I. Že je uzavřený a omezený už víme.

II. Buď nyní $Y \subseteq \mathbb{E}_n$ omezený a uzavřený. Jelikož je omezený, je pro dostatečně velký kompaktní interval

$$Y \subseteq J^n \subseteq \mathbb{E}_n.$$

J^n je kompaktní jako součin intervalů $\langle a_i, b_i\rangle$, a jelikož je Y uzavřený v $\mathbb{E}_n$ je též uzavřený v J^n a tedy kompaktní.

Tvrzení. *Buď* $f : (X, d) \to (Y, d')$ *spojité zobrazení a buď* $A \subseteq X$ *kompaktní. Potom je* $f[A]$ *kompaktní.*

Důkaz. Buď $(y_n)_n$ posloupnost v $f[A]$. Zvolme $x_n \in A$ tak aby $y_n = f(x_n)$. Buď $(x_{k_n})_n$ konvergentní podposloupnost poslupnosti $(x_n)_n$. Potom je $(y_{k_n})_n = (f(x_{k_n}))_n$ konvergentní podposloupnost $(x_n)_n$.

Tvrzení. *Buď* (X, d) *kompaktní. Potom každá spojitá funkce* $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ *nabývá maxima i minima.*

Důkaz. Buď $Y = f[X] \subseteq \mathbb{R}$ kompaktní. Je to tedy omezená množina a musí mít supremum M a infimum m. Zřejmě máme $d(m, Y) = d(M, Y) = 0$ a jelikož Y je uzavřená, $m, M \in Y$.

Víme, že spojitá f je charakterisována tím, že všechny *vzory* uzavřených množin jsou uzavřené. Nyní podle vidíme, že je-li definiční obor kompaktní platí též, že *obrazy* uzavřených podmnožin jsou uzavřené. Z toho plyne (m.j.) následující.

Věta. *Je-li* (X, d) *kompaktní a je-li* $f : (X, d) \to (Y, d')$ *vzájemně jednoznačné spojité zobrazení, je to homeomorfismus.*

Obecněji, *nechť* $f : (X, d) \to (Y, d')$ *je spojité zobrazení* $g : (X, d) \to (Z, d'')$ *a nechť* $h : (Y, d') \to (Z, d'')$ *je takové, že* $h \circ f = g$. *Potom je* h *spojité.*

Důkaz. Buď B uzavřená v Z. Potom je $A = g^{-1}[B]$ uzavřená a tedy kompaktní v X a tedy je $f[A]$ kompaktní, a proto uzavřená v Y. Jelikož je f zobrazení na, máme $f[f^{-1}[C]] = C$ pro každé C. Proto je

$$h^{-1}[B] = f[f^{-1}[h^{-1}[B]]] = f[(h \circ f)^{-1}[B]] = f[g^{-1}[B]] = f[A]$$

uzavřená.

Posloupnost $(x_n)_n$ v metrickém prostoru (X, d) je *Cauchyovská* jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \text{ takové, že } \ m, n \geq n_0 \ \Rightarrow \ d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Pozorování. *Každá konvergentní posloupnost je Cauchyovská.*

Tvrzení. *Nechť má Cauchyovská posloupnost konvergentní podposloupnost. Potom konverguje (k limitě té podposloupnosti).*

Důkaz. Nechť je $(x_n)_n$ Cauchyovská a nechť $\lim_n x_{k_n} = x$. Buď $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ pro $m, n \geq n_1$ a $d(x_{k_n}, x) \leq \varepsilon$ pro $n \geq n_2$. Položíme-li $n_0 = \max(n_1, n_2)$ máme pro $n \geq n_0$ (protože $k_n \geq n$)

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) < 2\varepsilon.$$

Metrický prostor (X, d) je *úplný* jestliže v něm každá Cauchyovská posloupnost (X, d) konverguje.

Poznámky. 1. Podle Bolzano-Cauchyovy věty je reálná přímka $\mathbb{R}$ úplná.

2. Možnost kalkulu.

3. Silná ekvivalence metrik zachovává Cauchyovu vlastnost a úplnost, prostá ekvivalence ne.

Tvrzení. *Podprostor úplného prostoru je úplný právě když je uzavřený.*

Důkaz. I. Buď $Y \subseteq (X, d)$ uzavřený. Buď $(y_n)_n$ Cauchyovská v Y. Potom je Cauchyovská a tedy konvergentní v X, a kvůli uzavřenosti je limita v Y.

II. Nechť Y není uzavřený. Potom existuje posloupnost $(y_n)_n$ v Y konvergentní v X taková, že $\lim_n y_n \notin Y$. Potom je $(y_n)_n$ Cauchyovská v X, a jelikož je vzdálenost stejná, též v Y. Ale v Y nekonverguje.

Tvrzení. *Každý kompaktní prostor je úplný.*

Důkaz. Cauchovská posloupnost má podle kompaktnosti konvergentní podposloupnost a tedy konverguje.

Lemma. *Posloupnost*

$$(x_1^1, \dots, x_n^1), (x_1^2, \dots, x_n^2), \dots, (x_1^k, \dots, x_n^k), \dots$$

je Cauchyovská v $\prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$ *právě když každá z posloupností* $(x_i^k)_k$ *je Cauchyovská v* (X_i, d_i)*.*

Důkaz. $\Rightarrow$ plyne bezprostředně z toho, že $d_i(u_i, v_i) \leq d((u_j)_j, (v_j)_j)$.

$\Leftarrow$: Nechť je každá $(x_i^k)_k$ Cauchyovská. Pro $\varepsilon > 0$ a i zvolme k_i tak aby pro $k, l \geq k_i$ bylo $d_i(x_i^k, x_i^l) < \varepsilon$. Potom pro $k, l \geq \max_i k_i$ máme

$$d((x_1^k, \dots, x_n^k), (x_1^l, \dots, x_n^l)) < \varepsilon.$$

Věta. *Součin úplných prostorů je úplný. Speciálně,* $\mathbb{E}_n$ *je úplný.*

A z toho hned dostaneme

Důsledek. *Podprostor* Y *euklidovského prostoru* $\mathbb{E}_n$ *je úplný právě když je tam uzavřený.*

Podrobnosti.
Text: Kapitola XIII, Sekce 7 a 6