Vzory a obrazy

$$f : X \to Y, \quad A \subseteq X, \quad B \subseteq Y$$

<u>Obraz</u> podmnožiny $A \subseteq X$ v Y:

$$f[A] = \{f(x) \,|\, x \in A\}$$

<u>Vzor</u> podmnožiny $B \subseteq Y$ v X:

$$f^{-1}[B] = \{x \,|\, f(x) \in B\}$$

Tedy dostaneme zobrazení

$$\mathfrak{P}(X) \underset{f^{-1}[-]}{\overset{f[-]}{\rightleftarrows}} \mathfrak{P}(Y).$$

Platí:

$$f[A] \subseteq B \;\equiv\; A \subseteq f^{-1}[B],$$

$$f[f^{-1}[B]] \subseteq B \quad f^{-1}[f[A]] \supseteq A$$

Pozor: f^{-1} má dva významy:
inverse $f^{-1} : Y \to X$, nemusí existovat
část v symbolu $f^{-1}[-]$, má smysl vždy

Cvičení. 1. Je nějaký vztah mezi těmi f^{-1} a $f^{-1}[-]$?

2. Kdy platí $f^{-1}[f[A]] = A$?

3. Kdy platí $f[f^{-1}[B]] = B$?

Opakování. Potíže se zkoumáním funkce více proměnných přes jednotlivé souřadnice, příklad

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pro} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \quad \text{for} & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ještě ho budeme potřebovat.

Metrický prostor, metrika (vzdálenost), trojúhelníková nerovnost. Podprostor.
$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{E}_n$

Okolí, otevřené a uzavřené množiny, uzávěr.

Spojitost, konvergence, vzory otevřených resp. uzavřených množin.

Ekvivalentní a silně ekviv. metriky.

$$\alpha \cdot d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta \cdot d_1(x,y).$$

V $\mathbb{E}_n$ můžeme místo $\sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$ užívat

$$\max_i |x_i - y_i|.$$

Reálná funkce v n proměnných bude pro nás

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{E}_n$$

Podobně jako ve funkcích jedné proměnné nemůžeme se omezit na případy, kdy definiční obor je celý prostor $\mathbb{E}_n$. V případě funkcí jedné proměnné byly definiční obory obvykle intervaly nebo jednoduchá sjednocení intervalů. Tady budou definiční obory D složitější, často (ale ne vždy) otevřené množiny v $\mathbb{E}_n$.

O D se často mluví jako o oblasti na níž je funkce definovaná. To není termín (ve specifických kontextech toto slovo "oblast" termín je, tady ne).

Součiny. Pro (X_1, d_i), $i = 1, \dots, n$ definujeme n kartézském součinu $\prod_{i=1}^n X_i$ metriku

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max_i d_i(x_i, y_i).$$

Získaný

$$(\prod_{i=1}^n X_i, d) = \prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$$

se nazývá součin prostorů (X_i, d_i).

Píše se též

$$(X_1, d_1) \times \cdots \times (X_n, d_n).$$

Tedy je

$$(\mathbb{E}_n, \sigma) = \overbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{n \text{ krát}} = \mathbb{R}^n.$$

Věta. 1. *Projekce* $p_j = ((x_i)_i \mapsto x_j) : \prod_{i=1}^n (X_i, d_i) \to (X_j, d_j)$ *jsou spojitá zobrazení.*

2. *Buďte* $f_j : (Y, d') \to (X_j, d_j)$ *libovolná spojitá zobrazení. Potom jednoznačně určené zobrazení* $f : (Y, d') \to \prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$ *splňující* $p_j \circ f = f_j$, *totiž zobrazení definované předpisem* $f(y) = (f_1(y), \ldots, f_n(y))$, *je spojité.*

Jak to vypadá

$$\begin{tikzcd}
(Y,d) \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] \arrow[drr, "f_2"] \arrow[drrr, "f_3"] & & \prod_{i=1}^{3}(X_i,d_i) \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \arrow[dr, "p_3"] & \\
& (X_1,d_1) & (X_2,d_2) & (X_3,d_3)
\end{tikzcd}$$

Existuje přesně jedno f takové že

$$p_i \circ f = f_i$$

a <u>je spojité</u>.

Tedy studujeme-li spojitá zobrazení

$$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_m$$

záleží <u>na rozdíl od definičního oboru</u> spojitost v oboru hodnot jen na spojitosti v jednotlivých souřadnicích.

2. Parciální derivace.

Teď na chvíli po souřadnicích. Pro $f(x_1, \dots, x_n)$ vezmeme

$$\phi_k(t) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

Parciální derivace funkce f podle x_k (v bodě $(x_1, \dots, x_n)$) je

(obvyklá) derivace funkce ϕ_k,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\dots x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1} \dots) - f(x_1, \dots)}{h}.$$

Označení

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n),$$

Pro $f(x, y)$, píšeme

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \quad \text{atd.}$$

Když $\frac{\partial f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_k}$ existuje pro všechna $(x_1, \dots, x_n)$ v nějaké oblasti D máme funkci

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : D \to \mathbb{R}.$$

Když budeme mluvit o parciální derivaci bude vždy zřejmé máme-li na mysli funkci, nebo jen číslo (hodnotu té limity nahoře).

Všimněte si, že nespojitá funkce f z příkladu spojitosti po souřadnicích má obě parciální derivace v každém bodě. Tedy,

existence parciálních derivací zde neimplikuje spojitost !

Budeme potřebovat něco silnějšího.

Připomeňte si tvrzení ekvivalentní se standardní derivací:

Existuje μ konvergující k 0 při $h \to 0$ a A takové, že

$$f(x+h) - f(x) = Ah + |h| \cdot \mu(h)$$

Geometrický pohled:

$\underline{f(x+h) - f(x) = Ah}$ vyjadřuje tečnu

ke grafu funkce v bodě $(x, f(x))$.

$|h| \cdot \mu(h)$ je jakási malá chyba.

Mysleme podobně o funkci $f(x, y)$ a uvažujme plochu

$$S = \{(t, u, f(t, u)) \,|\, (t, u) \in D\}.$$

Dvě parciální derivace vyjadřují směry dvou tečných přímek k S v bodě $(x, y, f(x, y))$,

<u>ale ne tečnou rovinu</u>

a teprve ta bude uspokojivé rozšíření faktu nahoře.

Pro $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_n$ definujeme

$$\|\mathbf{x}\| = \max_i |x_i|$$

To bude místo absolutní hodnoty, místo h bude n-tice blízká nule.

Totální diferenciál.

Funkce f má *totální diferenciál* v bodě $\mathbf{x}$ existuje-li

funkce μ spojitá v okolí U bodu $\mathbf{o}$ taková, že $\mu(\mathbf{o}) = 0$

a čísla $A_1, \ldots, A_n$ pro která

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} A_k h_k + \|\mathbf{h}\| \mu(\mathbf{h}).$$

Tvrzení. *Nechť má funkce f totální diferenciál v bodě $\mathbf{a}$. Potom platí, že*

1. *f je spojitá v $\mathbf{a}$.*
2. *f má všechny parciální derivace v $\mathbf{a}$, a to s hodnotami*

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} = A_k.$$

1. Máme

$$|f(\mathbf{x}-\mathbf{y})| \leq |\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})|+|\mu(\mathbf{x}-\mathbf{y})\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$$

a limita na pravé straně pro $\mathbf{y} \to \mathbf{x}$ je 0.

2. Máme

$$\frac{1}{h}(f(\ldots x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \ldots) - f(x_1, \ldots)) =$$

$$= A_k + \mu((\ldots, 0, h, 0, \ldots))\frac{\|(0, \ldots, h, \ldots, 0)\|}{h},$$

a limita na pravé straně je zřejmě A_k.

Všimněte si, že teď již spojitost dostaneme!

Vidíte, že v případě funkcí jedné proměnné není rozdíl mezi existencí derivace v bodě a a vlastností mít totální diferenciál v tomto bodě V případě více proměnných je však tento rozdíl zcela zásadní.

Může být trochu překvapující, že zatímco existence parciálních derivací mnoho neznamená,

existence spojitých parciálních derivací

je něco úplně jiného.

Platí

Věta. *Nechť má f spojité parciální derivace v okolí bodu $\mathbf{a}$. Potom má v bodě $\mathbf{a}$ totální diferenciál*

Buď

$$\mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{h},\ \mathbf{h}^{(1)} = (0, h_2, \dots, h_n),\ \mathbf{h}^{(2)} = (0, 0, h_3, \dots, h_n) \quad \text{etc.}$$

(takže $\mathbf{h}^{(n)} = \mathbf{o}$). Potom máme

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} (f(\mathbf{a}+\mathbf{h}^{(k-1)}) - f(\mathbf{a}+\mathbf{h}^{(k)})) = M.$$

Podle Lagrangeovy věty existují $0 \le \theta_k \le 1$ takové, že

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}^{(k-1)}) - f(\mathbf{a}+\mathbf{h}^{(k)}) = \frac{\partial f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \theta_k h_k, a_{k+1}, \dots, a_n)}{\partial x_k} h_k$$

a můžeme pokračovat

$$\begin{aligned} M &= \sum \frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \theta_k h_k, \dots, a_n)}{\partial x_k} h_k = \\ &= \sum \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} h_k + \sum \left(\frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \theta_k h_k, \dots, a_n)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right) h_k = \\ &= \sum \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} h_k + \|\mathbf{h}\| \sum \left(\frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \theta_k h_k, \dots, a_n)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right) \frac{h_k}{\|\mathbf{h}\|}. \end{aligned}$$

Položme

$$\mu(\mathbf{h}) = \sum \left(\frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \theta_k h_k, \dots, a_n)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right) \frac{h_k}{\|\mathbf{h}\|}.$$

Jelikož $\left| \dfrac{h_k}{\|\mathbf{h}\|} \right| \le 1$ a jelikož jsou funkce $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ spojité, $\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{o}} \mu(\mathbf{h}) = 0$.

Můžeme tedy schematicky psát

spojité PD $\Rightarrow$ TD $\Rightarrow$ PD

Pravidla pro počítání parciálních derivací. Aritmetická pravidla jsou stejná jako pro obyčejné derivace (tady také parciální derivace nic jiného než obyčejné derivace nejsou).

Trochu jinak je tomu u pravidla pro skládání. Připomeňte si, že to se i pro obyčejné derivace dokazuje z formule

$$f(a+h) - f(a) = Ah + |h|\mu(h),$$

tedy z diferenciálu (který je tam ovšem totéž jako existence derivace).

Pravidlo pro skládání v nejjednodušší podobě:

Věta. *Nechť má* $f(\mathbf{x})$ *totální diferenciál v bodu* $\mathbf{a}$*. Nechť mají* $g_k(t)$ *derivace v bodě* b *a nechť je* $g_k(b) = a_k$ *pro* $k = 1, \ldots, n$*. Položme*

$$F(t) = f(\mathbf{g}(t)) = f(g_1(t), \ldots, g_n(t)).$$

Potom má F *derivaci v* b*, totiž*

$$F'(b) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \cdot g_k'(b).$$

Jak se to dokazuje :

$$\frac{1}{h}(F(b+h)-F(b)) = \frac{1}{h}(f(\mathbf{g}(b+h)) - f(\mathbf{g}(b)) =$$
$$= \frac{1}{h}(f(\mathbf{g}(b) + (\mathbf{g}(b+h) - \mathbf{g}(b))) - f(\mathbf{g}(b)) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{g_k(b+h) - g_k(b)}{h} + \mu(\mathbf{g}(b+h) - \mathbf{g}(b)) \max_k \frac{|g_k(b+h) - g_k(b)|}{h}.$$

Máme $\lim_{h\to 0} \mu(\mathbf{g}(b+h)-\mathbf{g}(b)) = 0$ jelikož jsou funkce g_k spojité v b. Jelikož funkce g_k mají derivace, jsou $\max_k \frac{|g_k(b+h)-g_k(b)|}{h}$ omezené v dostatečně malém okolí nuly. Limita posledního sčítance je tedy nula a máme

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(F(b+h) - F(b)) = \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{g_k(b+h) - g_k(b)}{h} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} A_k \lim_{h\to 0} \frac{g_k(b+h) - g_k(b)}{h} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} g_k'(b).$$

Co se děje geometricky: Tečná nadrovina vyjádřená diferenciálem vnější funkce f nemá žádný důvod preferovat hlavní osy v nichž se dějí derivace vnitřních funkcí. Proto by tady jen parciální derivace nestačily.

Důsledek. (Řetězové Pravidlo) *Nechť má $f(\mathbf{x})$ totální diferenciál v bodě $\mathbf{a}$. Nechť mají funkce $g_k(t_1, \ldots, t_r)$ parciální derivace v $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_r)$ a nechť je $g_k(\mathbf{b}) = a_k$ pro $k = 1, \ldots, n$. Potom má funkce*

$$(f \circ \mathbf{g})(t_1, \ldots, t_r) = f(\mathbf{g}(t)) = f(g_1(t), \ldots, g_n(t))$$

všechny parciální derivace v b, a platí

$$\frac{\partial (f \circ \mathbf{g})(\mathbf{b})}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g_k(\mathbf{b})}{\partial t_j}.$$