Themata. Děkuji za otázky navrhující themata k nimž bych se měl vrátit v této a v lednové přednášce. Bude čas i na víc, ptejte se dál.

Byl jsem požádán abych

(a) řekl více k otázce Věty o implicitních funkcích,

(b) vysvětlil jaká je role Věty o implicitních funkcích v otázce vázaných extrémů,

(c) vrátil se k Lebesgueovu integrálu,

(d) a ze cvičení přišlo abychom se ještě vrátili k některým otázkám metrických prostorů.

(e) A rád bych se ještě vrátil k řadám (měli jste Taylorovy řady). Zbude-li čas, rád bych vysvětlil zda, kdy, a proč může být limita

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_n$$

nahlížena jako součet nekonečně mnoha sčítanců (a rozšiřovat tak pojem konečného součtu oindexovaných sčítanců), a kdy je to prostě jen ta limita

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_n$$

(a) Věty o implicitních funkcích.
Jsou dány funkce $F^i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, \dots, n$ v $n+m$ proměnných a rádi bychom vyřešili systém rovnic

$$\begin{aligned} F^1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) &= 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots& \\ F^n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) &= 0. \end{aligned}$$

V jakém smyslu?

Přepišme to takto

$$\begin{aligned} F^1_{x_1,\dots,x_m}(y_1, \dots, y_n) &= 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots& \\ F^n_{x_1,\dots,x_m}(y_1, \dots, y_n) &= 0. \end{aligned}$$

a pozměňme terminologii na trochu sugestivnější: o proměnných $y_1, \dots, y_n$ budeme mluvit jako o *neznámých*.

Tak máme pro každý vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ soustavu

n rovnic o n neznámých $y_1, \dots, y_n$

$$F^1_{\mathbf{x}}(y_1, \dots, y_n) = 0,$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$F^n_{\mathbf{x}}(y_1, \dots, y_n) = 0$$

které by za rozumných podmínek (připomeťe si n *lineárních* rovnic o n neznámých) měly mít jednoznačné řešení

$$y_{1\mathbf{x}}, \dots, y_{n\mathbf{x}}.$$

Při měnících se vektorech $\mathbf{x}$ se mění systém rovnic a tím samozřejmě také výsledná řešení $y_{k\mathbf{x}}$. Tak dostaneme *funkce m proměnných*

$$f_k(x_1, \dots, x_m) = f_k(\mathbf{x}) = y_{k\mathbf{x}}$$

a Věta o Implicitních Funkcích se týká těchto funkcí.

Připomeňte si lineární algebru a systém lineárních rovnic

$$L^1(y_1,\dots,y_n)=0,$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$L^n(y_1,\dots,y_n)=0$$

to jest,

$$\sum_{j=1}^{n} A_{1j}y_j - b_1 = 0$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$\sum_{j=1}^{n} A_{nj}y_j - b_n = 0,$$

Ten má jednoznačné řešení právě když

$$\det A_{ij} \neq 0.$$

Vzpomeňme si nyní, že naše funkce $F_k(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ mají spojité parciální derivace, tedy totální diferenciály, a funkce $F^k_{\mathbf{x}}(y_1, \ldots, y_n)$ jsou v (malém) okolí bodu řešení $\mathbf{y}^0$ dobře aproximovány lineárními

$$\sum_{j=1}^{n} A_{kj}(y_j - y_j^0) + F_j^{\cdots}(\mathbf{y}^0) = \sum_{j=1}^{n} A_{kj} y_j + B_j$$

kde $A_{kj} = \dfrac{\partial F_k}{\partial y_j}$.

Tedy asi nikoho nepřekvapí, že podmínka pro jednoznačné řešení je vyjádřena nenulovým Jacobiho determinantem

$$\det\left(\frac{\partial F_k}{\partial y_j}\right).$$

(b) Role VoIF v otázce vázaných extrémů.

Situace: Hledáme lokální extrémy funkce

$$f(x_1, \ldots, x_n)$$

definované v oblasti D. Ve vnitřku D to není problém: budou mezi body v nichž jsou parciální derivace nulové. Potíže jsou s extrémy na hranici oblasti D.

Předpokládejme, že je tato hranice oblasti D popsána rovnicemi (vazbami)

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \; i = 1, \ldots, k.$$

Ve větě řešící tento problém,

Věta. *Buďte $f, g_1, \dots, g_k$ reálné funkce definované na otevřené množině $D \subseteq \mathbb{E}_n$; nechť mají spojité parciální derivace. Nechť je hodnost matice*

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}, & \dots, & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots, & \dots, & \dots \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1}, & \dots, & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

maximální, tedy k, v každém bodě oboru D.

Jestliže funkce f nabývá v bodě $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ lokálního extrému podmíněného vazbami

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ taková, že pro každé $i = 1, \dots, n$ platí

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} = 0.$$

je zásadní podmínka, aby hodnost matice

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}, & \dots, & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots, & \dots, & \dots \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1}, & \dots, & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

byla maximální možná, k (máme $k < n$). Proč je tomu tak, a jak to pomůže?

Ta matice musí mít regulární $k \times k$ podmatici, bez újmy obecnosti tedy třeba

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}, & \dots, & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \dots, & \dots, & \dots \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1}, & \dots, & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_k} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (*)$$

Vazby tvoří systém rovnic

$$g_1(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = 0,$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$g_k(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = 0.$$

s neznámými $x_1, \dots, x_k$ a a parametry (proměnnými) $x_{k+1}, \dots, x_n$.

$(*)$ je podmínka o Jacobiho determinantu která nam umožní použít VIF, a získáme $x_j = \phi_j(x_{k+1}, \dots, x_n)$ a můžeme pak počítat
extrémy funkce f na hranici oblasti D jako extrémy funkce

$$F(x_{k+1}, \dots, x_n) =$$
$$= f(\phi_1(x_{k+1}, \dots, x_n), \dots, \phi_k(x_{k+1}, \dots, x_n), x_{k+1}, \dots, x_n)$$

pro $x_{k+1}, \dots, x_n$ v otevřené možině, tedy hledáním nulových parciálních derivací (funkce F).

(c) Lebesgueův integrál.

Jen informace, žádné konstrukce, ani důkazy. Technika Riemannova integrálu může být rozšířena tak, že všechno co bylo možné dříve můžeme užívat i dále beze změn. Nadto můžeme bezpečně užívat např. následující pravidla.

Pokud $\int_{D_n} f$ *existuje pro* $n = 1, 2, \ldots$, *potom i* $\int_{\bigcup_n D_n} f$ *existuje.*

Buď D *omezená a* $|f_n(x)| \leq C$ *pro pevné* C. *Nechť* $\lim_n f_n$ *existuje.*
Existují-li $\int_D f_n$ *pro* $n = 1, 2, \ldots$, *existuje i* $\int_D \lim_n f_n$ *a platí*

$$\int_D \lim_n f_n = \lim_n \int_D f_n.$$

To je snadné si pamatovat. Platí mnohem více, např.:

(1) Pokud existují $\int_D f_n$ a $(f_n)_n$ je monotonní, je $\int_D \lim_n f_n = \lim_n \int_D f_n$.

(2) Mají-li smysl výrazy napravo a je-li $|f(t,x)| \leq g(x)$ pro integrabilní g, platí

$$\int_D f(t_0, x)\mathrm{d}x = \lim_{t \to t_0} \int_D f(t,x)\mathrm{d}x.$$

(3) Pokud pro integrabilní g je

$$\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\right| \leq g(x).$$

a v okolí U čísla t_0 dává všechno smysl, platí

$$\int_D \frac{\partial f(t_0, -)}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_D f(t_0, -).$$

(e) Nekonečné součty reálných čísel.

Řady (měli jste Taylorovy řady). Je-li dána posloupnost $(a_n)_n$ reálných čísel mluvíme o s ní spojené *řadě* dáváme-li smysl "součtu" $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Základní definice je limita

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Zde-je příklad ukazující potíž s interpretací této limity jako sečtením hodnot a_n. Uvažujme řadu s $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, to jest,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots .$$

Zřejmě $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_n$ existuje (a je někde mezi $\frac{1}{2}$ a 1).

Rozdělme a_n na dvě podmnožiny

$$\begin{array}{c} 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7}, \ldots, \text{a} \\ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \ldots. \end{array} \qquad (*)$$

Snadno vidíme, že žádná z množin $\{\sum_{k=1}^{n} a_{2n-1} \,|\, n = 1, 2, \ldots\}$ a $\{\sum_{k=1}^{n} a_{2n} \,|\, n = 1, 2, \ldots\}$ není omezená.

Pokusme se sečíst řadu v následujícím změněném pořadí. Nejprve sčítejme elementy horní posloupnosti $(*)$ dokud nepřekročíme číslo 10, potom pokračujme elementy dolní části $(*)$ až se dostaneme pod 5; potom zas v horní části až překročíme 100, pokračujeme dole až jsme zas pod 50, atd.. V tomto přerovnání α naší posloupnosti je limita $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha(n)}$ nekonečná! Mimochodem, asi jste si všimli, že jsme na tomto principu mohli přerovnat k jakémukoli součtu. Tedy můžeme sotva obecně považovat limitu částečných součtů za sumu spočetného systému čísel.

.

Takový součet s nekonečné posloupnosti $(a_n)_n$ by musel být dobře aproximován součty $\sum_{k\in K} a_k$, s konečnými $K \subseteq \mathbb{N}$. A tak tomu je v případě t.zv. absolutně konvergentních řad.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *absolutně konvergentní* konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Věta. *Pokud $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně existuje pro každé $\varepsilon > 0$ n konečná podmnožina $K \subseteq \mathbb{N}$ taková, že pro každou konečnou L takovou, že $K \subseteq L \subseteq \mathbb{N}$ je $|s - \sum_L a_n| < \varepsilon$ (jinými slovy, taková, že pro každou $M \subseteq \mathbb{N}$ s K disjunktní je $|\sum_M a_n| < \varepsilon$).*

Důkaz. $(\sum_{k=1}^{n}|a_k|)_n$ je Cauchyovská posloupnost. Buď n_0 takové, že pro každé $m > n \geq n_0$ je $\sum_{k=1}^{m}|a_k| - \sum_{k=1}^{n}|a_k| < \varepsilon$. Máme $\sum_{k=1}^{m}|a_k| - \sum_{k=1}^{n}|a_k| = \sum_{k=n+1}^{m}|a_k|$ a pro každou M konečnou disjunktní s $K = \{1, 2, \ldots, n_0\}$ existuje m takové, že $M \subseteq \{n = n_0 + 1, \ldots m\}$ a tedy

$$|\sum_{M} a_k| \leq \sum_{M} |a_k| \leq \sum_{k=n_0+1}^{m} |a_k| < \varepsilon.$$