

Budeme zkoumat reálné funkce několika reálných proměnných

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

Ve funkcích jedné proměnné se už trochu vyznáme, tak zkusme vzít

$$f(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

spoustu funkcí jedné proměnné, těm rozumíme.

To ale nefunguje

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{for } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$f(x, 0) = 0, f(0, x) = 0$ obě krásně spojité

pro $a \neq 0$ dokonce na celém oboru jsou $f(x, a)$ a $f(a, x)$ dány korektním aritmetickým výrazem

ale $f(0, 0) = 0$ a pro libovolně malé nenulové ε , tedy libovolně blízko $(0, 0)$ je

$$f(\varepsilon, \varepsilon) = \frac{1}{2}$$

Metrický prostor

$$(X, d), \quad d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Zatím to pro nás byl hlavně

$$(\mathbb{R}, |x - y|)$$

a další příklad je

$$(\mathbb{C}, |x - y|)$$

(**Pozor:** trojúhelníková nerovnost tady není pro $|x - y|$ tak triviální jako v \mathbb{R})

Euklidovský prostor \mathbb{E}_n : (\mathbb{R}^n, d)

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$$

Pro nás zvlášť důležitý, znáte ho také v podobě vektorového prostoru \mathbf{V}_n se skalárním součinem $\mathbf{u}\mathbf{v}$ a normou $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}\mathbf{u}}$ – a vzdáleností $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$

(X, d) kde $d(xy) = 1$ pro $x \neq y$ (diskretníprostor)

$F(a, b)$ množina všech omezených funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid a \leq x \leq b\}$$

Podprostor. (X, d) metrický prostor,
 $Y \subseteq X$

$$(Y, d') \quad \text{kde} \quad d'(x, y) = d(x, y)$$

Spojité zobrazení $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0,$$

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

(Srovnejte s

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0,$$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Triviality: Identické zobrazení $\text{id} : (X, d) \rightarrow (X, d)$,

Vložení podprostoru $j = (x \mapsto x) : (Y, d') \rightarrow (X, d)$

Složení $gf : (X, d) \rightarrow (Z, d'')$ spojitých zobrazení $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ a $g : (Y, d') \rightarrow (Z, d'')$ je spojitě

Konvergence. $\lim_n x_n = x$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 (n \geq n_0 \Rightarrow d(x, x_n) < \varepsilon)$$

(Srovnejte s

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 (n \geq n_0 \Rightarrow |x - x_n| < \varepsilon)$$

Věta. *Zobrazení $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ je spojitě právě když pro každou konvergentní $(x_n)_n$ v (X_1, d_1) posloupnost $(f(x_n))_n$ konverguje v (X_2, d_2) a platí $\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$.*

Důkaz. I. Bud' f spojitá a necht' $\lim_n x_n = x$. Pro $\varepsilon > 0$ zvolme ze spojitosti $\delta > 0$ tak aby $d_2(f(y), f(x)) < \varepsilon$ pro $d_1(x, y) < \delta$. Podle definice konvergence posloupnosti existuje n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ je $d_1(x_n, x) < \delta$. Tedy, je-li $n \geq n_0$ máme $d_2(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ a potom $\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$.

II. Necht' f není spojitá. Potom existují $x \in X_1$ a $\varepsilon_0 > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje $x(\delta)$ takové, že

$$d_1(x, x(\delta)) < \delta \quad \text{ale} \quad d_2(f(x), f(x(\delta))) \geq \varepsilon_0.$$

Položme $x_n = x(\frac{1}{n})$. Potom $\lim_n x_n = x$ ale $(f(x_n))_n$ nemůže konvergovat k $f(x)$. \square

Okolí. $\Omega(x, \varepsilon) = \{y \mid d(x, y) < \varepsilon\}$

“ U je okolí x ” $\equiv \exists \varepsilon > 0, \Omega(x, \varepsilon) \subseteq U$

Pozorování: 1. U je okolí x a $U \subseteq V \Rightarrow V$ je okolí x .

2. U a V jsou okolí $x \Rightarrow U \cap V$ je okolí x .

Otevřené množiny. $U \subseteq (X, d)$ je *otevřená* je-li okolím každého svého bodu.

Pozorování. Každá $\Omega_X(x, \varepsilon)$ je *otevřená* v (X, d) .

Pozorování. Množiny \emptyset a X jsou *otevřené*. Jsou-li $U_i, i \in J$, *otevřené* potom $\bigcup_{i \in J} U_i$ je *otevřená*, and jsou-li U a V *otevřené* je $U \cap V$ *otevřená*.

Uzavřené množiny. $A \subseteq (X, d)$ je uzavřená v $(X, d) \equiv$ pro každou $(x_n)_n \subseteq A$ konvergentní v X je $\lim_n x_n \in A$.

Tvrzení. $A \subseteq (X, d)$ je uzavřená v (X, d) právě když $X \setminus A$ je otevřená.

Důkaz. I. Nechť $X \setminus A$ není otevřená. Potom existuje bod $x \in X \setminus A$ takový, že pro každé n je $\Omega(x, \frac{1}{n}) \not\subseteq X \setminus A$. Zvolme $x_n \in \Omega(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Potom $(x_n)_n \subseteq A$ a $\lim x_n = x \notin A$ a tedy A není uzavřená.

II. Nechť je $X \setminus A$ otevřená a $(x_n)_n \subseteq A$ konverguje k $x \in X \setminus A$. Potom pro nějaké $\varepsilon > 0$ je $\Omega(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$ a tedy pro dost velké n , $x_n \in \Omega(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$, spor. \square

Důsledek. Množiny \emptyset a X jsou uzavřené. jsou-li A_i , $i \in J$, uzavřené je $\bigcap_{i \in J} A_i$ uzavřená, a jsou-li A and B uzavřené, je $A \cup B$ uzavřená.

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Uzávěr množiny A :

$$\overline{A} = \{x \mid d(x, A) = 0\}.$$

Tvrzení. (1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

$$(2) A \subseteq \overline{A},$$

$$(3) A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B},$$

$$(4) \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

$$(5) \overline{\overline{A}} = \overline{A}.$$

Důkaz. (4): $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Je-li $x \in \overline{A \cup B}$ a ne $x \in \overline{A}$ máme $\alpha = d(x, A) > 0$ a tedy $y \in A \cup B$ s $d(x, y) < \alpha$ jsou v B ; tedy je $x \in \overline{B}$.

(5): Bud' $d(x, \overline{A}) = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom máme $z \in \overline{A}$ takové, že $d(x, z) < \frac{\varepsilon}{2}$ a pro toto z můžeme zvolit $y \in A$ takové, že $d(z, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ a vidíme, že $x \in \overline{A}$. \square

Tvrzení. \bar{A} je množina všech limit konvergentních posloupností $(x_n)_n \subseteq A$.

Tvrzení. \bar{A} je uzavřená, a je to nejmenší uzavřená množina obsahující A . Tedy,

$$\bar{A} = \bigcap \{B \mid A \subseteq B, B \text{ uzavřená}\}.$$

Důkaz. Pokud $(x_n)_n \subseteq \bar{A}$ konverguje k x zvolme $y_n \in A$ s $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$.
Then $\lim_n y_n = x$ and x is in \bar{A} .

Je-li B uzavřená a $A \subseteq B$ k zvolme $x \in \bar{A}$ konvergentní $(x_n)_n$ v A , tedy v B tak aby $\lim x_n = x$. Potom je $x \in B$.

□

Věta. *Bud'te $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ metrické prostory a $f : X_1 \rightarrow X_2$ be zobrazení. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

- (1) *f je spojitě.*
- (2) *Pro každý $x \in X_1$ a každé okolí V bodu $f(x)$ existuje okolí U bodu x takové, že $f[U] \subseteq V$.*
- (3) *Pro každou otevřenou U v X_2 je vzor $f^{-1}[U]$ otevřený v X_1 .*
- (4) *Pro každou uzavřenou A v X_2 je vzor $f^{-1}[A]$ uzavřený v X_1 .*
- (5) *Pro každou $A \subseteq X_1$ je $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.*

Vlastnost nebo definice je *topologická* je-li zachovávána homeomorfismy. Máme tedy následující topologické vlastnosti a pojmy:

- konvergenci
- otevřenost
- uzavřenost
- uzávěr
- okolí
- nebo spojitost sama.

Silně ekvivalentní metriky d_1 a d_2 :

Identické zobrazení $(X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ je homeomorfismus.

d_1 a d_2 na téže množině jsou *silně ekvivalentní* existují-li kladné konstanty α a β takové, že

$$\alpha \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta \cdot d_1(x, y).$$

V euklidovských prostorech kde jsme zatím měli vzdálenost

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

položme

$$\lambda((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad \text{a}$$

$$\sigma((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max_i |x_i - y_i|.$$

Tvrzení. d, λ a σ jsou silně ekvivalentní metriky na \mathbb{E}_n .

Součiny. Pro $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ definujeme n kartézském součinu $\prod_{i=1}^n X_i$ metriku

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max_i d_i(x_i, y_i).$$

Získaný

$$\left(\prod_{i=1}^n X_i, d\right) = \prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$$

se nazývá součin prostorů (X_i, d_i) .

Píše se též

$$(X_1, d_1) \times \dots \times (X_n, d_n).$$

Tedy je

$$(\mathbb{E}_n, \sigma) = \overbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}^{n \text{ times}} = \mathbb{R}^n.$$

Věta. 1. Projekce $p_j = ((x_i)_i \mapsto x_j) : \prod_{i=1}^n (X_i, d_i) \rightarrow (X_j, d_j)$ jsou spojitá zobrazení.

2. Bud'te $f: (Y, d') \rightarrow (X_j, d_j)$ libovolná spojitá zobrazení. Potom jednoznačně určené zobrazení $f : (Y, d') \rightarrow \prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$ splňující $p_j \circ f = f_j$, totiž zobrazení definované předpisem $f(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y))$, je spojité.

Tedy studujeme-li spojitá zobrazení

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}_m$$

záleží na rozdíl od definičního oboru spojitost v oboru hodnot jen na spojitosti v jednotlivých souřadnicích.