

Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie 2

5. série — bonusová

odevzdat do 16. 7. 2025

Maximální možnou délku Davenportovy–Schinzelovy posloupnosti řádu s nad symboly $1, 2, \dots, n$ budeme značit $\lambda_s(n)$. Složitost buňky arrangementu geometrických objektů v rovině je počet vrcholů nebo hran ležících na hranici buňky, počítaný i s násobností.

1. Dokažte, že počet Davenportových–Schinzelových posloupností řádu 2 nad abecedou $\{1, \dots, n\}$, které mají délku $2n - 1$, a v nichž nejlevější výskyty symbolů tvoří rostoucí posloupnost, je roven Catalanovu číslu C_{n-1} . Catalanova čísla jsou definována jako $C_0 = 1$ a $C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \dots + C_{n-1}C_0$ pro $n \geq 1$. Např. pro $n = 3$ máme dvě posloupnosti: 12321 a 12131. [2]

2. Složitost jedné buňky arrangementu úseček

Nechť C je buňka arrangementu n úseček v obecné poloze v rovině, jejichž sjednocením je souvislá množina.

(a) Úsečky očíslováme čísly 1 až n . Sepíšeme si posloupnost čísel úseček podél hranice buňky C , počínaje náhodným vrcholem na hranici buňky. Dokažte, že se v takto získané posloupnosti nevyskytuje podposloupnost $ababab$, a tedy složitost buňky C je $O(\lambda_4(n))$. [2]

(b) Dokažte, že složitost buňky C je nejvýše $O(\lambda_3(n))$. Rada: Každé úsečce přiřaďte více různých symbolů. [2]

3. Věta o zóně přes Davenportovy–Schinzelovy posloupnosti

Zóna přímky p v arrangementu přímek je množina stěn (všech dimenzí), které vidí p . Dokažte převodem na Davenportovy–Schinzelovy posloupnosti, že zóna jedné přímky v arrangementu n přímek v rovině má složitost $O(n)$. [3]

4. Nechť g_1, g_2, \dots, g_m jsou grafy m spojitých po částech lineárních funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{R} , které se dohromady skládají z n úseček a polopřímek. Dokažte, že dolní obálka g_1, g_2, \dots, g_m má složitost $O(\frac{n}{m}\lambda_3(2m))$. Konkrétně pro $m = O(1)$ je složitost dolní obálky lineární. [2]

5. Definujme matice

$$N = \begin{pmatrix} * & 1 & * & 1 \\ 1 & * & 1 & * \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & * & 1 \\ 1 & 1 & * \end{pmatrix},$$

kde $*$ zastupuje libovolný prvek. Nechť $A \in \{0, 1\}^{n \times n}$ je $n \times n$ matice s prvky a_{ij} , $i, j \in [n]$, složená z nul a jedniček. Řekneme, že A neobsahuje N jako podmatici, pokud neexistují indexy $i_1 < i_2$ a $j_1 < j_2 < j_3 < j_4$ takové, že $a_{i_2j_1} = a_{i_1j_2} = a_{i_2j_3} = a_{i_1j_4} = 1$. Podobně se definuje neobsahování ostatních matic.

(a) Dokažte, že pokud A neobsahuje N jako podmatici, pak má nejvýše $\lambda_3(n) + O(n)$ jedniček. [2]

(b) Dokažte, že pokud A neobsahuje L jako podmatici, pak má nejvýše $O(n)$ jedniček. [1]

(c) Najděte matici A obsahující alespoň $\Omega(n \log(n))$ jedniček, která neobsahuje U jako podmatici. [2]