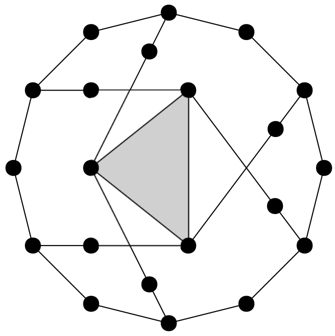
Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie 2

4. série — d-reprezentovatelnost, d-kolabovatelnost a triangulace

odevzdat do 13. 5. 2025

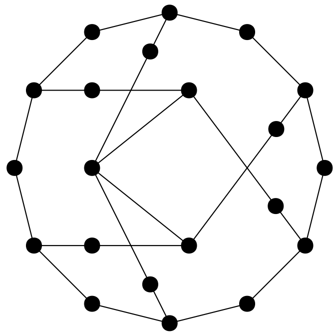
1. Rozhodněte, zda následující simpliciální komplexy jsou 2-reprezentovatelné.

   a)

   [1]

   b)

   [2]

2. Nechť H je d-kolabovatelný simpliciální komplex s n vrcholy, takový, že každá $(d+1)$-tice vrcholů tvoří stěnu v H. Dokažte, že H tvoří *kombinatorický* $(n-1)$-*simplex*, tj. každá neprázdná podmnožina vrcholů tvoří stěnu H. **[2]**

3. Bez použití Wegnerovy věty dokažte, že hranice $(d+1)$-rozměrného křížového mnohostěnu není d-reprezentovatelná. (Můžete využít oddělovací větu.) **[2]**

4. Dokončete důkaz optimální verze zlomkové Hellyho věty z přednášky. Tedy dokažte, že pro každé $d \geq 1$, $n \geq d+1$ a $\alpha \in (0,1]$ platí následující: Nechť $\mathcal{F}$ je systém n konvexních množin v $\mathbb{R}^d$ takový, že alespoň $\alpha \cdot \binom{n}{d+1}$ $(d+1)$-tic množin z $\mathcal{F}$ má neprázdný průnik, potom alespoň $\beta \cdot n$ množin z $\mathcal{F}$ má neprázdný průnik, kde $\beta = 1-(1-\alpha)^{1/(d+1)}$.

   K důkazu využijte následující tvrzení dokázané na přednášce: Nechť $d \geq 1$, $n \geq d+1$ a $r \geq 0$. Nechť $\mathcal{F}$ je systém n konvexních množin v $\mathbb{R}^d$ takový, že každá $(d+r+1)$-tice množin z $\mathcal{F}$ má prázdný průnik. Potom počet $(d+1)$-tic množin z $\mathcal{F}$ s prázdným průnikem je alespoň $\binom{n-r}{d+1}$. **[2]**

5. Nechť K je d-kolabovatelný simpliciální komplex. Ukažte, že existuje posloupnost elementárních d-kolapsů začínající K a končící simpliciálním komplexem dimenze menší než d taková, že každý elementární d-kolaps v této posloupnosti je určen volnou stěnou dimenze přesně $d-1$ a odstraňuje alespoň dvě stěny (tedy volná stěna, na které se provádí, není maximální). **[3]**

6. Nechť P je konečná množina bodů v rovině, z nichž žádné 3 neleží na společné přímce a žádné 4 na společné kružnici. Definujme na P graf DT (zvaný *Delaunayova triangulace*): 2 body a, b jsou spojeny hranou, právě když existuje kruh mající a i b na hranici a žádný bod z P uvnitř.

   Nechť T je minimální kostra v úplném grafu na P, kde váhy hran jsou vzdálenosti bodů. Dokažte, že $T \subseteq DT$. **[2]**