

Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie 2

3. série — Průnikové vlastnosti konvexních množin

odevzdat do 22. 4. 2025

- (Carathéodoryho věta pro kužely.)
Nechť A je libovolná množina v \mathbb{R}^d a $x \in \text{cone}(A)$, tedy x lze vyjádřit jako $x = \sum_{i \in [n]} \alpha_i a_i$ pro $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in A$ a $\alpha_i \geq 0$. Dokažte, že existuje množina $B \subseteq A$ s nejvýše d body taková, že $x \in \text{cone}(B)$. [2]
- (Barevná Carathéodoryho věta pro kužely.)
Nechť x je bod v \mathbb{R}^d různý od počátku a A_1, \dots, A_d jsou množiny v \mathbb{R}^d takové, že pro každé $i \in [d]$ platí $x \in \text{cone}(A_i)$. Dokažte, že existují body a_1, \dots, a_d takové, že $a_i \in A_i$ a zároveň $x \in \text{cone}(\{a_1, \dots, a_d\})$. [2]
- (Barevná Carathéodoryho věta, silnější verze v rovině.)
Nechť X_1, X_2, X_3 jsou konečné množiny bodů v rovině takové, že pro každé $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, platí $0 \in \text{conv}(X_i \cup X_j)$. Dokažte, že existují body x_1, x_2, x_3 takové, že $x_i \in X_i$ a zároveň $0 \in \text{conv}(\{x_1, x_2, x_3\})$. [3]
- (Barevná Hellyho věta.)
Nechť $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{d+1}$ jsou konečné systémy konvexních množin v \mathbb{R}^d takové, že pro každou volbu $C_i \in \mathcal{C}_i$, $i \in [d+1]$ platí $\bigcap_{i \in [d+1]} C_i \neq \emptyset$. Dokažte, že existuje $i \in [d+1]$ takové, že $\bigcap C_i \neq \emptyset$ (tj. existuje bod ležící ve všech množinách jedné barvy). Náповěda: uvažte lexikografická minima průniků a ukažte, že jedno z nich je hledaným bodem. [3]
- Dokažte, že hodnota $(r-1)(d+1)+1$ v Tverbergově větě nejde vylepšit: pro každá přirozená čísla $d, r \geq 2$ existuje množina $(r-1)(d+1)$ bodů v \mathbb{R}^d bez Tverbergova r -rozkladu (tj. pro každý rozklad na r částí X_1, \dots, X_r platí $\bigcap_{i=1}^r \text{conv}(X_i) = \emptyset$). [2]
- (a) Nechť S je množina n bodů v obecné poloze v rovině a $x \in \text{conv}(S)$. Dokažte, že existuje alespoň $n-2$ trojúhelníků tvořených body z S , které obsahují x ve svém konvexním obalu. [2]
(b) Nechť S je n -bodová množina v obecné poloze v rovině a $x \in \mathbb{R}^2$ libovolný bod. Dokažte, že počet trojúhelníků tvořených body z S , které obsahují x ve svém konvexním obalu, je maximálně $n^3/24 + O(n^2)$. Náповěda: počítejte trojúhelníky neobsahující x . [3]