

# Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie 2

## 2. série — $k$ -díry, půlící přímky a nakreslení grafů

odevzdat do 1. 4. 2025

1. Nechť  $X$  je konečná neprázdná množina bodů v obecné poloze v rovině. Dokažte, že počty  $k$ -děr v  $X$  splňují následující identity:

$$(a) \sum_{k=1}^{|X|} (-1)^k \cdot \#k\text{-děr} = -1, \quad [2]$$

- (b) Pokud  $|X| \geq 2$ , pak

$$\sum_{k=1}^{|X|} (-1)^k \cdot k \cdot \#k\text{-děr} = -\#\text{bodů uvnitř } \text{conv}(X). \quad [2]$$

Nápověda: posouvání bodů po křivkách do vhodné konfigurace.

2. Nechť  $X$  je  $n$ -bodová množina v obecné poloze v rovině. Dokažte, že počet 4-děr v  $X$  je minimálně kvadratický v  $n$ . [2]
3. Nechť  $P$  je konečná množina bodů v rovině ne nutně v obecné poloze, která neobsahuje 5-díru. Dokažte, že pak každý konvexní 5-úhelník  $Q$  určený body z  $P$  obsahuje alespoň jeden bod z  $P$  v uzavřeném „vnitřním“ pětiúhelníku určeném úhlopříčkami  $Q$ . [2]
4. Nechť  $n$  je sudé a  $P$  je množina  $n$  bodů v obecné poloze v rovině. Nechť  $k \leq n/2$  a  $h$  je přímka, která neprochází žádným bodem  $P$  a rozděluje rovinu na dvě poloroviny obsahující  $k$  a  $n - k$  bodů z  $P$ . Ukažte, že  $h$  protíná přesně  $k$  půlících úseček  $P$ . [2]
5. Nechť  $P$  je množina  $n$  bodů v obecné poloze v rovině. Řekneme, že dvojice bodů z  $P$  je  $k$ -hrana, pokud přímka určená těmito dvěma body odděluje z množiny  $P$  přesně  $k$  bodů v jedné otevřené polorovině. Označme  $E_k(P)$  počet  $k$ -hran v  $P$ . Dále označme  $\overline{cr}(P)$  počet čtveřic bodů z  $P$  v konvexní poloze.

Dokažte následující identitu:

$$\overline{cr}(P) = 3 \binom{n}{4} - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} E_k(P) \cdot k \cdot (n - k - 2).$$

Nápověda: spočítejte dvěma způsoby počet trojic  $(a, \overline{bc}, d)$ , kde  $a, b, c, d$  jsou různé body z  $P$ ,  $a$  leží vlevo od přímky  $\overline{bc}$  a  $d$  leží vpravo od  $\overline{bc}$ . [2]

6. Hrany grafu jsou *nezávislé* pokud nemají společný vrchol. O *nakreslení* grafu předpokládáme, že hrany mají jen konečný počet společných bodů a každý společný bod hran kromě společného vrcholu je křížení.

Rozhodněte, pro které volby  $n$  a  $m$  platí, že  $K_{m,n}$  má v každém nakreslení v rovině celkem lichý počet křížení nezávislých dvojic hran.

Nápověda: co se změní při spojitým deformování hran? [3]