Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie 2

1. série — Erdősova–Szekeresova věta

nápověda 5. 3. 2025, odevzdat do 11. 3. 2025

Z důvodu ochrany osobních údajů nám u prvních odevzdaných řešení napište kromě jména i přezdívku, pod kterou chcete mít své body zveřejněny na webu. U dalších řešení už stačí psát buď jméno, nebo přezdívku.

1. (a) Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n(k) \in \mathbb{N}$ takové, že každá množina s $n(k)$ body v rovině obsahuje k bodů v *obecné poloze* (žádné tři body z dané množiny neleží na společné přímce) nebo k bodů na společné přímce. **[2]**

   (b) Zkuste předešlé tvrzení dokázat s $n(k)$ nanejvýš polynomiálně velkým vzhledem ke k. **[1]**

2. (a) Dokažte Erdősovu–Szekeresovu větu v $\mathbb{R}^d$: pro každé $d \geq 3$ a $k \in \mathbb{N}$ existuje $n = n_d(k) \in \mathbb{N}$ takové, že v každé množině s alespoň n body z $\mathbb{R}^d$ v *obecné poloze* (žádných $m+2$ bodů z dané množiny neleží v afinním podprostoru dimenze m, pro $m = 1, 2, \ldots, d-1$) lze najít podmnožinu velikosti k v konvexní poloze. **[2]**

   (b) Ukažte, že každá dostatečně velká konečná množina bodů v $\mathbb{R}^3$ v obecné poloze obsahuje 7-díru. **[2]**

3. Nechť P je množina $3n - 1$ bodů v rovině v konvexní poloze. Každá uzavřená úsečka mezi dvěma body z P je obarvena buď červeně nebo modře. Dokažte, že existuje n červených navzájem disjunktních úseček nebo n modrých navzájem disjunktních úseček. **[3]**

4. Dokažte, že pro dostatečně velkou absolutní konstantu C platí, že $n \times n$ mřížka $\{(i,j);\ i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ neobsahuje podmnožinu v konvexní poloze s více než $Cn^{2/3}$ body. **[4, nápověda]**

5. Dokažte, že 2^h-bodová Hortonova množina pro $h \geq 1$ neobsahuje podmnožinu v konvexní poloze s více než $4h$ body. **[2]**

Informace o cvičení naleznete na `https://kam.mff.cuni.cz/~kvgweb/kvg`