Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

5. série — bonusová

odevzdat do 16. 7. 2020

1. (Jednorozměrné selekční lemma.)
   Nechť $X \subset \mathbb{R}$ je množina n reálných čísel, nechť $\alpha > 0$ a nechť F je množina $\alpha\binom{n}{2}$ X-intervalů. Dokažte, že existuje bod ležící v alespoň $\Omega(\alpha^2\binom{n}{2})$ intervalech z F. **[2]**

2. Nechť X je n-bodová množina v obecné poloze v rovině a $x \in \mathbb{R}^2$ libovolný bod. Dokažte, že počet X-trojúhelníků obsahujících x ve svém konvexním obalu je maximálně $n^3/24 + O(n^2)$. Nápověda: počítejte trojúhelníky neobsahující x. **[3]**

3. a) Nechť $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ jsou konečné systémy konvexních množin v $\mathbb{R}^d$ takové, že každá dvojice množin $A \in \mathcal{C}_1$ a $B \in \mathcal{C}_2$ má neprázdný průnik. Dokažte, že pak $\mathcal{C}_1$ má neprázdný průnik nebo existuje d nadrovin takových, že jejich sjednocení protíná každou množinu z $\mathcal{C}_2$. **[2]**

   b) Najděte příklad systémů $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ v rovině splňujících stejné předpoklady jako v části a) takových, že $\mathcal{C}_1$ má prázdný průnik a žádná přímka nepotíná všechny množiny z $\mathcal{C}_2$. **[1]**

   c) (Barevná Hellyho věta, silnější verze v rovině.)
   Nechť $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ jsou konečné systémy konvexních množin v rovině takové, že pro každou volbu $C_i \in \mathcal{C}_i$, $i \in [3]$, platí $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \neq \emptyset$. Dokažte, že existují dva různé indexy $i, j \in [3]$ takové že $\bigcap \mathcal{C}_i \neq \emptyset$ a zároveň $\bigcap \mathcal{C}_j \neq \emptyset$, nebo existují 4 přímky, jejichž sjednocení protíná každou množinu v $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$. **[2]**

4. Najděte příklad množiny X šesti bodů v rovině a její rozklad $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ takový, že (X_1, X_2, X_3) má transverzály stejného typu, ale konvexní obaly všech transverzál (tj. „duhových trojic“) mají prázdný průnik. **[1]**

5. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_{d+1}$ jsou disjunktní konečné množiny v $\mathbb{R}^d$, jejich sjednocení je v obecné poloze, a nechť $C_i = \mathrm{conv}(X_i)$. Dokažte, že následující tři podmínky jsou ekvivalentní:

   (a) Žádná nadrovina neprotíná všechny $C_1, C_2, \ldots, C_{d+1}$ najednou.

   (b) Pro každou neprázdnou indexovou podmnožinu $I \subset [d+1]$ lze množiny $\bigcup_{i \in I} C_i$ a $\bigcup_{i \in [d+1] \setminus I} C_i$ ostře oddělit nadrovinou.

   (c) $(X_1, X_2, \ldots, X_{d+1})$ má transverzály stejného typu.

   [6]

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`