Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

3. série - Průsečíková čísla a počítání incidencí

odevzdat do 29. 11. 2019

1. Dokažte, že graf s n vrcholy, který má úsečkové nakreslení v rovině bez třech vzájemně se křížících hran, má $O(n^{3/2})$ hran. Můžete použít průsečíkové lemma. (*Úsečkové nakreslení* je nakreslení, kde každá hrana je nakreslena jako úsečka.) **[2]**

2. Nechť $I_{1\mathrm{circ}}(n, m)$ označuje maximální počet incidencí mezi n body a m jednotkovými kružnicemi v rovině. Ukažte, že $I_{1\mathrm{circ}}(n, n) = O(n^{4/3})$. **[3]**

3. Mějme systém podmnožin $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ n-prvkové množiny N (tj. $\forall i \in [n]\ M_i \subseteq N$), z nichž každé dvě mají nejvýše jeden společný prvek. Počtem incidencí mezi N a $\mathcal{M}$ budeme rozumět $I(N, \mathcal{M}) := \sum_{i=1}^{n} |M_i|$. Rozhodněte, zda musí platit $I(N, \mathcal{M}) = O(n^{4/3})$. **[2]**

4. Najděte n-bodovou množinu v $\mathbb{R}^4$ s $\Omega(n^2)$ jednotkovými vzdálenostmi. **[3]**

5. Nechť P je n-bodová množina v rovině.

   (a) Nechť $k > 1$. Ukažte, že maximální možný počet přímek takových, že každá z nich obsahuje alespoň k bodů P, je $O(n^2/k^3 + n/k)$ a že maximální počet incidencí těchto přímek s množinou P je $O(n^2/k^2 + n)$. **[3]**

   (b) Je dáno $\alpha \in (0, \pi)$. Ukažte, že P určuje nejvýše $O(n^{7/3})$ trojúhelníků s alespoň jedním úhlem o velikosti α. (Nápověda: rozdělte trojúhelníky ABC s úhlem α při vrcholu A na 2 skupiny podle toho, zda přímka AC obsahuje více než $n^{1/3}$ bodů z P.) **[3]**