

# Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

## 2. série — Věty Hellyho typu a věta o sendviči

nápověda 8.11.2018, odevzdat do 15.11.2018

1. Necht'  $C_1, \dots, C_n$  je soubor alespoň tří konvexních množin v rovině a necht'  $K$  je úsečka  $[0, 1] \times \{0\}$ . Ukažte, že pokud průnik každé trojice množin z  $C_1, \dots, C_n$  obsahuje posunutou kopii  $K$ , potom také průnik všech  $C_1, \dots, C_n$  obsahuje posunutou kopii  $K$ . [2]
2. Necht'  $M \subset \mathbb{R}^2$  je uzavřený mnohoúhelník o ploše  $S(M)$ , ne nutně konvexní. Dokažte, že existuje bod  $x \in \mathbb{R}^2$  takový, že libovolná přímka jím procházející dělí  $M$  na dvě části o ploše alespoň  $S(M)/3$ . [2]
3. Řekneme, že soubor  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$  konvexních množin v rovině má  $(p, q)$ -vlastnost, pokud  $n \geq p$  a z každé  $p$ -tice z  $\mathcal{C}$  lze vybrat  $q$  množin s neprázdným průnikem. Špendlíkovost  $s(\mathcal{C})$  souboru množin  $\mathcal{C}$  je velikost nejmenší množiny bodů  $X \subset \mathbb{R}^2$  takové, že každé  $C_i \in \mathcal{C}$  obsahuje alespoň jeden bod z  $X$ .
  - (a) Dokažte, že je-li  $\mathcal{C}$  konečný soubor osových obdélníků (tj. uzavřených obdélníků s hranami rovnoběžnými s osami) s  $(2, 2)$ -vlastností, pak  $s(\mathcal{C}) = 1$ . [2]
  - (b) Dokažte, že je-li  $\mathcal{C}$  konečný soubor osových obdélníků se  $(4, 3)$ -vlastností, pak  $s(\mathcal{C}) \leq 2$ . [3]
4. Mějme soubor  $C_1, \dots, C_n$  konvexních množin v rovině,  $n \geq 4$ . Ukažte, že pokud průnik každé čtveřice z  $C_1, \dots, C_n$  obsahuje polopřímku, potom průnik všech  $C_1, \dots, C_n$  obsahuje polopřímku. [4, nápověda]
5. Věta o sendviči říká, že pro disjunktní konečné množiny  $A_1, \dots, A_d \subset \mathbb{R}^d$  existuje nadrovina  $h$  taková, že každý jí určený otevřený poloprostor obsahuje nanejvýš  $\lfloor \frac{|A_i|}{2} \rfloor$  bodů z každého  $A_i$ .

Necht'  $A_1, A_2, \dots, A_d$  jsou disjunktní množiny v  $\mathbb{R}^d$  takové, že každá  $A_i$  obsahuje  $n$  bodů a body z  $\bigcup_{i=1}^d A_i$  jsou v obecné poloze (tj. žádná nadrovina neobsahuje víc než  $d$  bodů z tohoto sjednocení). Ukažte, že potom lze body z  $\bigcup_{i=1}^d A_i$  rozdělit do  $n$  *duhových*  $d$ -tic (tj. množin  $\{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ , kde  $x_i \in A_i$ ), jejichž konvexní obaly jsou disjunktní.

Chcete-li použít jinou verzi věty o sendviči než tu uvedenou v zadání, nejdříve ji dokažte. [2]