Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

5. série — bonusová

odevzdat do 22.6.2018

Maximální možnou délku Davenportovy–Schinzelovy posloupnosti řádu s nad symboly $1, 2, 3, \ldots, n$ budeme značit $\lambda_s(n)$.

1. Nechť $g_1, g_2, \ldots, g_m$ jsou grafy m spojitých po částech lineárních funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, které se dohromady skládají z n úseček a polopřímek. Dokažte, že dolní obálka $g_1, g_2, \ldots, g_m$ má složitost $O(\frac{n}{m}\lambda_3(2m))$. Konkrétně pro $m = O(1)$ je složitost dolní obálky lineární. **[2]**

2. Definujme matice

$$N := \begin{pmatrix} * & 1 & * & 1 \\ 1 & * & 1 & * \end{pmatrix}, \qquad L := \begin{pmatrix} 1 & * \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U := \begin{pmatrix} 1 & * & 1 \\ 1 & 1 & * \end{pmatrix},$$

kde $*$ zastupuje libovolný prvek. Nechť $A \in \{0,1\}^{n\times n}$ je $n \times n$ matice s prvky $a_{ij}, i, j \in [n]$, složená z nul a jedniček. Řekneme, že A *neobsahuje N jako podmatici*, pokud neexistují indexy $i_1 < i_2$ a $j_1 < j_2 < j_3 < j_4$ takové, že $a_{i_2 j_1} = a_{i_1 j_2} = a_{i_2 j_3} = a_{i_1 j_4} = 1$. Podobně se definuje neobsahování ostatních matic.

   (a) Dokažte, že pokud A neobsahuje N jako podmatici, pak má nejvýše $\lambda_s(n) + O(n)$ jedniček, kde s je vhodná konstanta. **[1]**

   (b) Dokažte, že pokud A neobsahuje N jako podmatici, pak má nejvýše $\lambda_3(n) + O(n)$ jedniček. **[2]**

   (c) Dokažte, že pokud A neobsahuje L jako podmatici, pak má nejvýše $O(n)$ jedniček. **[1]**

   (d) Najděte matici A obsahující alespoň $\Omega(n \log(n))$ jedniček, která neobsahuje U jako podmatici. **[2]**

3. Nechť $Y \subset \mathbb{R}^2$ je sjednocení tří jednotkových úseček se společným vrcholem v počátku (tj. úsečkové nakreslení $K_{1,3}$, lze jej také chápat jako 1-rozměrný geometrický simpliciální komplex). Kartézský součin $Y \times Y$ je sjednocením čtverců v $\mathbb{R}^4$, které lze po roztriangulování chápat jako 2-rozměrný geometrický simpliciální komplex. Dokažte, že $Y \times Y$ nelze po částech lineárně vnořit do $\mathbb{R}^3$. **[3]**