Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

4. série — Věty Hellyho typu a Davenportovy–Schinzelovy posloupnosti

odevzdat do 23. 5. 2018

1. Dokažte, že existuje $h \in \mathbb{N}$ s následující vlastností.

   Předpokládejme, že $F_1, F_2, \ldots, F_{h+1}$ jsou množiny v rovině takové, že pro každou neprázdnou $I \subseteq [h+1]$ lze průnik $F_I = \bigcap_{i \in I} F_i$ vyjádřit jako sjednocení nejvýše dvou konvexních množin (speciálně tuto vlastnost splňuje prázdná množina). Dále předpokládejme, že každá h-tice z množin $F_1, F_2, \ldots, F_{h+1}$ má neprázdný průnik. Dokažte, že průnik všech množin F_i je neprázdný (tj. $F_{[n+1]} \neq \emptyset$). **[4, nápověda]**

2. Dokažte Sarkariovo–Onnovo lemma z přednášky. Pro připomenutí, pro $x \in \mathbb{R}^d$ značíme x^+ vektor v $\mathbb{R}^{d+1}$ získaný z x přidáním hodnoty 1 jako poslední souřadnici. Dále $w_1, \ldots, w_r$ jsou vrcholy pravidelného $(r-1)$-simplexu v $\mathbb{R}^{r-1}$ se středem v počátku. Pro $i \in [r]$ a $x \in \mathbb{R}^d$ definujeme $\phi_i(x)$ jako $x^+ \otimes w_i \in \mathbb{R}^{(d+1)(r-1)}$. ($u \otimes v$ je tenzorový součin vektorů u a v, lze si jej představit např. jako matici uv^T, chápeme-li u, v jako sloupcové vektory). Dále pro soubor $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_r)$ po dvou disjunktních množin z $\mathbb{R}^d$ takových, že jejich sjednocení má $(d+1)(r-1)+1$ bodů, definujeme Sarkariovu–Onnovu transformaci $\Phi(\mathcal{A})$ jako $\operatorname{conv}(\bigcup\{\phi_i(a); i \in [r], a \in A_i\})$. Potom Sarkariovo–Onnovo lemma říká, že průnik $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{conv}(A_i)$ je neprázdný, právě když $\Phi(\mathcal{A})$ obsahuje počátek.

   Můžete používat vlastnosti vektorů w_i uvedené na přednášce. **[3]**

Maximální možnou délku Davenportovy–Schinzelovy posloupnosti řádu s nad symboly $1, 2, \ldots, n$ budeme značit $\lambda_s(n)$. *Složitost buňky* arrangementu geometrických objektů v rovině je počet vrcholů nebo hran ležících na hranici buňky, počítaný i s násobností.

3) Dokažte, že počet Davenportových–Schinzelových posloupností řádu 2 nad abecedou $\{1, \ldots, n\}$, které mají délku $2n-1$, a v nichž nejlevější výskyty symbolů tvoří rostoucí posloupnost, je roven Catalanovu číslu C_{n-1}. *Catalanova čísla* jsou definována jako $C_0 = 1$ a $C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0$ pro $n \geq 1$. Např. pro $n = 3$ máme dvě posloupnosti: 12321 a 12131. **[2]**

4) *Složitost jedné buňky arrangementu úseček*
   Nechť C je buňka arrangementu n úseček v obecné poloze v rovině, jejichž sjednocením je souvislá množina.

   (a) Úsečky očíslujeme čísly 1 až n. Sepíšeme si posloupnost čísel úseček podél hranice buňky C, počínaje náhodným vrcholem na hranici buňky. Dokažte, že se v takto získané posloupnosti nevyskytuje podposloupnost *ababab*, a tedy složitost buňky C je $O(\lambda_4(n))$. **[2]**

   (b) Dokažte, že složitost buňky C je nejvýše $O(\lambda_3(n))$. Rada: Každé úsečce přiřaďte více různých symbolů. **[2]**

5) *Věta o zóně přes Davenportovy–Schinzelovy posloupnosti*
   Zóna přímky p v arrangementu přímek je množina stěn (všech dimenzí), které vidí p. Dokažte převodem na Davenportovy–Schinzelovy posloupnosti, že zóna jedné přímky v arrangementu n přímek v rovině má složitost $O(n)$. **[3]**