Oficiál Kombinatorického semináře

Zimní semestr 2002/2003

Tradice zapisování přednášek do oficiálního bloku, *oficiálu*, na Jarní škole kombinatoriky (a v některých časech též na Kombinatorickém semináři) je dnes snad již starší než většina současných účastníků tohoto seminaře. Desítky oficiálů jsou uchovány v bezpečí kanceláře profesora Nešetřila. V uplynulém semestru, inspirováni touto tradicí, jsme vyzvali studentské účastníky semináře k podílu na přípravě sborníku, který právě držíte ve svých rukou.

Můžeme s potěšením konstatovat, že právě díky přičinlivosti studentů se podařilo shromáždit zápisky, tvořící pěknou a snad i užitečnou vzpomínku na kombinatorické semináře v zimním semestru 2002/3.

V Praze v dubnu 2003

Jiří Fiala
Martin Klazar
Pavel Valtr

Program semináře:

Self-complementary circulant graphs

Samodoplňkové „otáčecí" grafy

B. Alspach, J. Morris

Referoval Martin Pergel dne 16. 10. 2002 a 23. 10. 2002
Zapisoval Karel Karlík

Definice: Graf G na n vrcholech je samodoplňkový, jestliže je isomorfní svému doplňku: $G \cong \bar{G}$.

Budeme se zabývat regulárními grafy.

Tvrzení: G je regulární samodoplňkový graf $\Rightarrow |V(G)| = 4k+1$

Důkaz: 1) $|E(G)| = |E(\bar{G})|$ a $|E(G)| + |E(\bar{G})| =$ počet všech hran na $K_n = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow |E(G)| = \frac{n(n-1)}{4} \Rightarrow$ buďto $4|n$ nebo $4|(n-1)$ (tedy $n = 0(\mathrm{mod}\ 4)$ nebo $n = 1(\mathrm{mod}\ 4)$).

2) $deg(G) = deg(\bar{G}) \Rightarrow deg(G) = \frac{n-1}{2} \Rightarrow n$ je liché.

3) dohromady $n = 1(\mathrm{mod}\ 4)$, tj. $n = |V(G)| = 4k+1$ pro nějaké $k \in N_0$.

Definice: G je circulant, jestliže $\exists S \subseteq \{1, ..., n-1\} : G = (V, E) = (\{v_1, ..., v_n\}, \{\{v_i, v_j\} | (i - j \mod n) \in S$ nebo $(j - i \mod n) \in S\}$. S se nazývá symbol grafu.

Pozorování:

- Do S stačí dávat čísla do $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (stačí příslušné hrany obrátit).
- Circulant grafy lze libovolně „otáčet" (isomorfismy).

Věta: $\exists G$ (SC C) na n vrcholech $\equiv$ ($\forall p$ z faktorizace n) p je tvaru $4k+1$.

Důkaz: "$\Leftarrow$" matematickou indukcí podle složitosti faktorizace n.

1) n je prvočíslo … existuje těleso Z_n; vytvoříme circulant graf na vrcholech $0, 1, \ldots n-1$ se signaturou $S = \{$kvadratické zbytky $Z_n\} = \{x \in Z_n | \exists y \in Z_n : x = y^2 (\mathrm{mod}\ n)\}$. Protože prvočíslo $n = 4k+1$, je -1 kvadratický zbytek a k. zbytků je v Z_n polovina (s nulou $\frac{n+1}{2}$.

G je circulant z konstrukce; SC je například díky isomorfismu $G \to \bar{G} : v_i \mapsto v_{ai}$ pro nějaké $a \notin S$: „délky" hran se změní z kvadratických zbytků na nezbytky a naopak (k. zbytků je jenom polovina).

2) $n = p.q$; máme SCC graf G na p vrcholech se signaturou S_G a SCC graf H na q vrcholech se signaturou S_H; věncovým součinem sestrojíme SCC graf $G \xi H$

Sestrojíme p kopií $G(G_0, \dots G_{p-1})$; mezi G_i a G_j dáme $K(p,p) \equiv \{v_i, v_j\} \in E(H)$.

V rámci G je stupeň $deg(G) = \frac{p-1}{2}$, mezi spojenými G_i, G_j přibude p; celkový stupeň se tedy zachová správně $\frac{p-1}{2} + p\frac{q-1}{2} = \frac{p-1+pq-p}{2} = \frac{pq-1}{2}$.

Samodoplňkovost: v rámci G jasná, doplnit podle isomorfismu na H. $G\xi H \cong \bar{G}\xi\bar{H}$.

Circulant: přečíslujeme vrcholy po sloupcích zleva dolů (v_i v G_j dostane číslo $qi+j$). Symbol $G\xi H$ bude $S_{G\xi H} = q.S_G \cup \cup_{k=1}^{p}(k.q + S_H)$. Pro každou hranu najdeme posunutou hranu z každého vrcholu, protože G i H jsou circulant grafy.

"$\Rightarrow$" budeme uvažovat minimální protipříklad a ukážeme, že existuje menší protipříklad (sporem).

Definice: Permutační grupa G na Ω je tranzitivní $\equiv (\forall \alpha, \beta \in \Omega)(\exists g \in G) : g(\alpha) = \beta$ a je dvojitě tranzitivní $\equiv (\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Omega, (\alpha = \gamma) \equiv (\beta = \delta))(\exists g \in G) : g(\alpha) = \beta \& g(\gamma) = \delta$.

Definice: Buď G permutační grupa na Ω. $B \subseteq \Omega$ je blok $G \equiv (\forall g \in G)(g(B) = B \vee g(B) \cap B = \emptyset$

Pozorování: V tranzitivních grupách platí $\forall d$ G na Ω buďto nemá bloky velikosti d, nebo bloky velikosti d tvoří disjunktní rozklad Ω (úplný systém bloků).

Definice: $\emptyset, \Omega, \{a\}$ jsou triviální bloky. Ostatní jsou netriviální. Grupa G se nazývá primitivní, má-li pouze triviální bloky, jinak se nazývá neprimitivní.

Definice: Buď G konečná grupa. Jestliže každá primitivní grupa H, která obsahuje G' = regulární reprezentaci G jako tranzitivní podgrupu, je dvojitě tranzitivní, pak se G nazývá Burnsideova grupa.

Definice: Regulární reprezentace grupy G je grupa permutací $g^* : g^*(x) = xg$ (nebo $g^*(x) = g^{-1}x$) pro všechna $g \in G$.

Pozorování: G' je tranzitivní podgrupa dvojitě tranzitivní grupy $\Rightarrow$ sama je dvojitě tranzitivní.

Věta: (1) cyklické grupy složeného řádu jsou Burnsideovy.

(2) G neprimitivní s bloky $B_1, \dots, B_l$, $\widehat{G}$ = působení G na bloky B_i, $\widehat{G}$ neprimitivní s bloky $C_1, \dots, C_k \Rightarrow G$ neprimitivní s bloky $B'_1, \dots, B'_k$, které odpovídají blokům C_j.

(3) n složené $\Rightarrow$ pro netriviální circulant graf na n vrcholech je $Aut(G)$ neprimitivní.

Lemma: n není prvočíslo, G je circulant na vrcholech $1, \dots n$, $Aut(G)$ působí neprimitivně na V_G a vytváří bloky B_i délky $d \Rightarrow d$ dělí $|V(G)|$ & $B_i = \{v_j | j \equiv i (mod \frac{n}{d})\}$.

Důkaz: Vezmi blok velikosti d; $\exists$ úplný rozklad na bloky velikosti d; po přečíslování vrcholů je $\rho = (n, 1, \dots, n-1) \in Aut(1, \dots, n)$ („otočení" grafu o 1 vrchol „zpátky") můžeme skládat, takže můžeme G libovolně „otáčet".

Kdyby bloky nebyly pravidelné (tvaru ze znění lemma), dostali bychom po některém otočení permutaci, která zobrazí některý vrchol bloku zpátky do bloku a jiný ven z bloku, což je spor s definicí bloku (například zkusíme zobrazit „nejkratší" hranu bloku na „nejdelší").

Nyní už přejdeme k samotnému důkazu "$\Rightarrow$". To je tvrzení: je-li G samodoplňkový circulant graf na n vrcholech, je každé prvočíslo z faktorizace n tvaru $4k+1$. Mějme minimální protipříklad G.

Podle tvrzení 1 $n \cong 1(\text{mod } 4)$, jinak na n vrcholech nevytvoříme circulant graf.

n je složené (jinak každé prvočíslo z faktorizace n je už n samo).

Ve faktorizaci n je sudý počet (nemusí být různé) prvočísel tvaru $4k+3$ (n liché $\Rightarrow$ 2 tam není; kdyby jich bylo liše, bylo by $n \equiv -1 \equiv 3(mod 4)$).

G je circulant, samodoplňkový a netriviální (ze složenosti n plyne $n > 1$). Proto podle věty 2.3 je $Aut(G)$ neprimitivní s úplným systémem bloků $B_0, \dots, B_{\frac{n}{d}-1}$.

Když pro $B_i \subseteq V(G)$ označíme $G[B_i]$ graf indukovaný B_i na G, pak podle lemma je $(\forall B_i, B_j)(G[B_i] \cong G[B_j])$.

Máme (ze samodoplňkovosti) isomorfismus $\pi : G \simeq \bar{G}$. π^2 zobrazuje hrany na hrany a nehrany na nehrany, takže je to automorfismus rotující o $2k$ bloků a protože počet bloků je lichý, musí π být rotace o k bloků, což po složení s nějakou mocninou ρ dává samodoplňkovost všech $G[B_i]$. Díky volbě pravidelných B_i a tomu, že G je circulant, jsou i $G[B_i]$ circulant grafy.

Zobrazení ρ rotuje (postupně všechny) bloky, takže faktorgrupa $\widehat{Aut(G)}$ (na $\{B_0, \dots, B_{\frac{n}{d}-1}\}$) obsahuje regulární reprezentaci cyklické grupy řádu $\frac{n}{d}$.

Kdyby $\widehat{Aut(G)}$ byla neprimitivní, můžeme pomocí věty 2.2 její bloky slučovat do větších, takže můžeme BÚNO předpokládat, že $\widehat{Aut(G)}$ je primitivní.

G je minimální protipříklad $\Rightarrow G[B_i]$ protipříklady nejsou $\Rightarrow |V(G[B_i]| = 4k_i + 1$. Prvočísla tvaru $4k+3$ se tedy do rozkladu n musela dostat z počtu bloků, tj. $\frac{n}{d}$. Jelikož počet těchto prvočísel je sudý, je $\frac{n}{d}$ číslo složené.

Protože máme cyklickou grupu H (s generátorem ρ) složeného řádu $\frac{n}{d}$, která je podle věty 1.1 Burnsideova, a máme regulární reprezentaci H v $\widehat{Aut(G)}$, je podle definice Burnsideových grup $\widehat{Aut(G)}$ buďto neprimitivní (což je spor s BÚNO předpokladem) nebo dvojitě tranzitivní.

G je circulant graf $\Rightarrow$ mezi každými dvěma bloky vede stejně hran.

G je samodoplňkový $\Rightarrow$ mezi každými dvěma bloky vede stejně hran v G i v $\bar{G}$.

Hran mezi dvěma bloky v G a $\bar{G}$ dohromady je d^2, což je liché číslo, ale podle předchozího to má být sudé číslo $\Rightarrow$ spor. Tím jsme vyvrátili předpoklad existence prvočísla tvaru $4k+3$ v rozkladu n [].

Konec jinak: buď π isomorfismus G a $\bar{G}$, $(a,b) \in E_G, \pi(a) = c, \pi(b) = d$, takže $(c,d) \in E_{\bar{G}}$. Potom díky dvojité tranzitivitě $\widehat{Aut(G)}$ existuje automorfismus $\alpha \in Aut(G)$ takový, že $\alpha(a) = c, \alpha(b) = d$, takže $(c,d) \in E_G$, což je spor (hrana je současně v grafu i jeho doplňku).

Complexity of Langton's ant

Zložitosť Langtonovho mravca

A. Gajardo, A.Moreira, E.Goles

Referoval Tomáš Vyskočil dne 6. 11. 2002
Zapisovala Mirka Sotáková

Úvod

Langtonov mravec je systém definovaný na dvojrozmernej mriežke. Každá bunka sa nachádza v jednom z dvoch stavov, *choď vľavo* alebo *choď vpravo.* Mravec je šípkou meniacou smer pri prechode bunkou, vzhľadom na svoj aktuálny smer. Stav bunky sa po prechode mravca mení. Možno sa naň tiež dívať ako na celulárny automat alebo na hlavu dvojrozmerného Turingovho stroja. Zdá sa, že pri štarte z ľubovolnej počiatočnej konfigurácie vytvorí po konečnom počte krokov periodickú diaľnicu.

Trošičku z teórie zložitosti

Rozhodovací problém je problém, ktorého riešenie pre daný prípad je áno alebo nie. Problém je *rozhodnuteľný*, ak existuje algoritmus, ktorý na túto otázku správne odpovie po konečnom čase. Rozhodnuteľné problémy sú zaradené do tzv *tried zložitosti.* Trieda P pozostáva z problémov riešiteľných v polynomiálnom čase. Problém, na ktorý možno redukovať ľubovolný problém z P sa nazýva *P-ťažký*, keď je navyše z P, je *P-úplný.* Problém A je redukovateľný na problém B (tiež B redukuje A), ak existuje funkcia R pracujúca s logaritmickou pamäťou vzhľadom na veľkosť vstupu taká, že x je pozitívny prípad A práve vtedy, ak $R(x)$ je p.p. B.

Hovoríme, že systém je *univerzálny*, ak dokáže simulovať univerzálny Turingov stroj.

Poznámočka: Boolovský obvod je orientovaný acyklický graf s postupnosťou vstupných uzlov (s nulovým vstupným stupňom) ohodnotených premennými alebo boolovskými konštantami a postupnosťou výstupných uzlov, v ktorom každý iný uzol predstavuje boolovský operátor. Jeho veľkosť je počet jeho uzlov (operátorové uzly - tiež logické brány).

Predchádzajúce výsledky

Ohľadom správania sa mravca je ich pomerne málo.

Trajektória mravca je neohraničená (nemá konečný diameter).

Množina buniek, navštívených nekonečne veľa krát, nemá rohy (roh množiny je bunka, ktorej aspoň 2 susedné neprotiľahlé bunky neležia v danej množine). (Poznámka na okraj: Ono sa vlastne predpokladá, že táto množina je prázdna.)

Domnienka: Pre ľubovolnú počiatočnú konfiguráciu s konečným nosičom (počet políčok jednej z farieb je konečný) postaví mravec periodickú diaľnicu v nejakom smere.

Výsledky

Článok sa zaoberá konštrukciou boolovských obvodov, kde vstupné premenné sú stavy určitých buniek, výpočet prebieha po trajektórii mravca a výstupom sú opäť stavy určitých buniek. Prvým dôsledkom je dolné ohraničenie zložitosti systému:

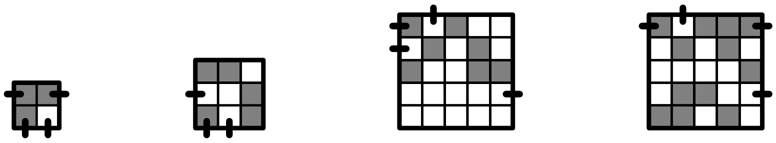
Existuje problém (navštívi mravec danú bunku?), ktorý redukuje P-úplný problém (výpočet boolovského obvodu), teda je P-ťažký.

Na druhej strane, táto konštrukcia povolí simuláciu akéhokoľvek lineárneho celulárneho automatu pre konfigurácie kde v danom čase dôjde k zmene stavu konečného počtu buniek. To má dva dôsledky:

Systém dokáže simulovať univerzálny Turingov stroj.
Existuje nerozhodnuteľný problém spojený so správaním mravca.

Konštrukcia obvodov

Ukážeme, ako pre daný boolovský obvod postaviť konfiguráciu, pre ktorú vstupné premenné sú reprezentované stavmi určitých buniek, výpočet prebieha po trajektórii mravca a je zapísaný do vopred určených buniek. Prebieha zhora nadol a nech prebieha zľava doprava. Na vrchu brány je niekoľko vstupných buniek, dole niekoľko výstupných. Na začiatku budú všetky výstupy v stave doľava (false). Mravec vojde do brány zľava a opustí ju idúc doprava, pričom vnútri sa pohybuje po trajektórii danej vstupmi (v súlade s funkciou, ktorú brána reprezentuje). Na výpočet umiestnime vstupy do buniek na vrchu konfigurácie a pre za sebou nasledujúce úrovne výpočtu prechádzajme po riadkoch logické brány zhora nadol. Pri prechode posledným riadkom, stav poslednej výstupnej bunky je výsledkom obvodu pre daný vstup. Pri prechode medzi riadkami musíme zostrojiť pravo-ľavé verzie brán a tým povoliť striedavo meniť smer prechodu jednotlivých riadkov. Použijeme brány, ktoré umožnia robiť nasledujúce operácie s bunkami - not (out=¬in), duplicate (out1=in, out2=in), cross (out1=in1, out2=in2), copy (out=in). Napr. not- ak vstupná bunka je doľava (false), mravec navštívi výstupnú a zmení jej stav na doprava (true) a bránu opustí, inak ju opustí hneď. Ukážme ako tieto brány vnoriť do mriežky, po ktorej chodí mravec.



Popis obrázku (zľava, označenie vstupov a výstupov idúc v smere hodinových ručičiek po stranách štvorca (začiatok vľavo dole)):

1. 3, 2, 4, 1
2. 1, 3, 2
3. 4, 1, 3, 2
4. 3, 1, 4, 2

Popíšme ako pracujú tri typy "krížení" (crossings, A, B, C) a jeden typ "spojenie" (junction, J).

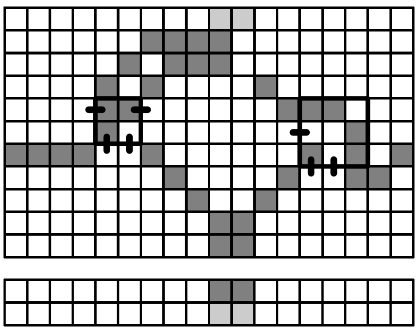
A: vstup 1, výstup 2; ak potom vstup 3, výstup 4

J: vstup 1 alebo 2, výstup 3

B: vstup 1, výstup 2; ak potom vstup 3, výstup 4; ak však na začiatku vstup 3, tiež výstup 4

C: ako B

NOT:



(Mravec vchádza zľava a vychádza vpravo, hore vstupná, dole výstupná hodnota brány)

Vieme, že ak je daný boolovský obvod a úloha s možnými odpoveďami áno, nie, rozhodnúť, či táto úloha spĺňa daný obvod je P-úplný problém (problém B).

Pre danú počiatočnú (s konečným nosičom) konfiguráciu mriežky, počiatočnú pozíciu mravca a danú bunku α sa pýtame- navštívi mravec α? (problém P)

Pretože prípad B je pozitívny, práve vtedy, ak jeho obraz v P je pozitívny, transformácia je redukcia z B na P, počet riadkov v bráne je ohraničený dvojnásobkom výšky obvodu plus počtom krížení (usporiadané dvojice brán v riadku), teda $2H + W^2H$, kde H je výška a W šírka obvodu. Počet brán v riadku je nanajvýš W. Teda počet buniek *doprava* je $r = o(W^3H)$. Algoritmus, ktorý popisuje transformáciu, vystačí s logaritmickou pamäťou (pamätá si pozíciu prekladaného symbolu a aktuálnu výšku obvodu, čo sú čísla ohraničené veľkosťou vstupu a stačí na nich logaritmická pamäť (binárny zápis)). Výstupom je zoznam súradníc buniek v stave *doprava*, ktorý je polynomiálny vzhľadom na veľkosť vstupu. Teda P je P-ťažký.

Dá sa ukázať, že nerozhodnuteľnosť niektorých CA- problémov sa transformáciou dedí i na systém Langtonovho mravca a že tento systém dokáže simulovať univerzálny Turingov stroj.

In-place Merging

Třídění na místě

B.C. Huang, M.A. Langston

Referoval Tomáš Valla dne 13. 11. 2002
Zapisoval David Kronus

Problém: Mějme v poli délky n dvě vzestupně setříděné posloupnosti. Naším úkolem je sestavit algoritmus, který *slévá* tyto dvě posloupnosti v čase $O(n)$ pouze s použitím $O(1)$ pomocné paměti. Slévání m rozumíme spojení dvou setříděných posloupností do jedné setříděné.[]

Nejprve si zavedu základní značení. Velkými písmeny budu označovat posloupnosti, tedy A, B jsou posloupnosti. Posloupnost C, která vznikne konkatenací posloupností A a B budu značit $C = AB$. Symbolem $|A|$ budu značit počet prvků posloupnosti A.

Ukažme si jednoduchý postup, který umožňuje prohodit dvě posloupnosti v lineárním čase. Mějme tedy posloupnost $A = LSP$ a chceme prohodit L a P, aby výsledek byl PSL. Nutno poznamenat, že podposloupnosti L, S a P mohou mít různou délku. Algoritmus prohození bude následující:

1. Zrcadlově obrať jednotlivé podposloupnosti L, S, P.

2. Zrcadlově obrať celou posloupnost A.

Zrcadlové obrácení posloupnosti délky l dokážeme udělat jednoduše v čase $O(l)$. Stačí mít dva indexy do pole a jet jimi proti sobě od opačných konců pole a prohazovat prvky. Čas je lineární a pomocná paměť je $O(1)$.[]

Nyní se vrhněme na konstrukci algoritmu in-place merge. Vstupem tedy bude pole A, které se skládá z dvou podposloupností A_1 a A_2. Délka $|A| = n$. Pro prvotní algoritmus si zavedeme omezení na vlastnosti A, potom ukážeme, jak se vypořádat s obecným vstupem. Předpokládejme tedy:

1. $n = l^2$, pro $l = 2k$ (n je mocnina sudého čísla)

2. $|A_1| = c*\sqrt{n}$, $|A_2| = d*\sqrt{n}$ (podposloupnosti jsou násobky odmocniny délky pole)

Algoritmus:

1. Rozděl pole na $\sqrt{n}$ bloků délky $\sqrt{n}$. První blok budu v dalším postupu nazývat *buffer*.
2. Do bufferu přesuň $\sqrt{n}$ největších prvků (beru od konce dvou setříděných posloupností). Buffer nemusí být setříděný. Původní prvky bufferu přesunu na pozice, ze kterých jsem prvky do bufferu dal. Tímto prohozením jsem mohl vytvořit maximálně dva další bloky obsahující nejmenší prvky. Pro jednoduchost budu předpokládat, že všechny bloky v poli mají stejnou velikost ($\sqrt{n}$) a je jich $\sqrt{n}$.
3. Proveď *Blocksort*, tzn. setřiď bloky vzestupně podle maximálního (posledního) prvku. Použij třídění přímým výběrem. To obnáší $\sqrt{n}$ kroků, ve kterých nejprve nalezni minimum z nejvýše $\sqrt{n}$ prvků a potom případně prohoď (pomocí výše popsaného postupu) minimální blok na správné místo. Složitost tohoto kroku je tedy nejvýše $\sqrt{n} * \sqrt{n} = n$.
4. Prováděj následující cyklus:
   (a) Označ A posloupnost začínající prvním blokem za bufferem a obsahující všechny bloky, které tvoří setříděnou posloupnost, tzn. na hranici bloků v A nenastává pokles. Jako posloupnost B označ blok bezprostředně za A. Pokud takový blok neexistuje, cyklus končí.
   (b) Slévej A a B do bufferu (a když je plný, tak dále do A). Prvky při přesunu do bufferu vždy prohazuj za prvek, na jehož místo ho dáváš. Prvky z A mají přednost, tzn. při rovnosti prvků z A a B vezmi prvek z A. Skonči, až sleješ celé A. Jako buffer budu nyní brát blok délky $\sqrt{n}$ za setříděnou posloupností vzniklou sléváním.
5. Nyní jsme v situaci, kdy za bufferem je již setří děná posloupnost A. Prohoď tedy A a buffer. Buffer dotřiď jakýmkoli způsobem.

Důkaz korektnosti algoritmu: Je potřeba se podí vat na jeden průběh cyklu v kroce 4. Platí následující invarianty:

1. A dojde při slévání dříve než B. To je proto, že bloky jsou setříděné vzestupně podle posledního prvku a prvkům z A dávám přednost.
2. V B vždy něco zbyde. To platí ze stejného důvodu jako předchozí invariant.

3. Koncové prvky A a B pocházejí z různých (vstupních) posloupností, protože Blocksort zachovává pořadí v posloupnostech.

Pro dokázání správnosti se stačí přesvědčit, že poslední prvek posloupnosti vzniklé sléváním v kroce k (v k-tém průchodu cyklu v kroce 4) je menší než nejmenší prvek posloupnosti vzniklé v kroce $k+1$.

Označme si A_i a B_i posloupnosti slévané v kroce i. Posloupnost vzniklou sléváním v kroce i označím R_i. Nechť poslední (největší) prvek R_k je l a první (nejmenší) prvek R_{k+1} je f. Chci ukázat, že $l \leq f$.

Nechť je $f \in A_k$. Rozlišme dva případy:

- $f \in A_{k+1}$ Protože A_{k+1} začíná úsekem, který zbyl z B_k po slévání v kroce k, a prvky dalších bloků tvořících A_{k+1} (pokud nějaké takové jsou) musí vzestupně navazovat, platí $l \leq f$.
- $f \in B_{k+1}$ Pokud je blok B_{k+1} ze stejné vstupní posloupnosti jako blok B_k, jistě $l \leq f$. V opačném případě podle invariantu 3 jsou koncové prvky A_k a B_{k+1} ze stejné posloupnosti, a proto $l \leq f$.[]

Na závěr je ještě potřeba podívat se na zobecnění algoritmu pro obecný vstup, který nesplňuje naše speciální předpoklady:

1. Pokud $n \neq l^2$, pak vezmeme větší buffer, aby ostatní bloky měli velikost $\sqrt{n}$.
2. Pokud není hranice vstupních posloupností na hranici bloků, vytvoř pro zarovnání menší blok před hranicí a s jeho velikostí se vypořádej podle následujícího návodu.
3. Pokud nám během algoritmu vzniknou bloky jiné velikosti než $\sqrt{n}$, budu si je pamatovat a budu s nimi operovat podle jejich velikosti. Typicky těchto bloků bude relativně málo.

List Edge Coloring of Outerplanar Graphs

Hranové obarvení vnějškově rovinných grafů

Andrea Hackmann, Arnfried Kemnitz

Referoval Tomáš Valla dne 20. 11. 2002
Zapisoval Vlastimil Janda

f je dobré obarvení $\equiv f : V(G) \rightarrow \{1..k\}$ a $\forall uv \in E(G) : f(u) \neq f(v)$
$\chi(G) \equiv min\{k : f : V(G) \rightarrow \{1..k\}$ je dobré $\}$
f je L-obarvení $\equiv$ 1) $\forall v \in V(G) : f(v) \in L(v)$
2) f je dobré
$\chi\prime(G) \equiv \chi(L(G))$ (tj. pro L-obarvení)
$ch(G) \equiv min\{k : \forall v \in V(G) je |L(v)| \geq ka \exists$ L-obarvení $\}$ - choosability
$|ch(G)| \geq |\chi(G)|$

G je vnějškově rovinný $\equiv$ G je rovinný a $\exists$ jeho nakreslení tak, že $\forall$ vrcholy jsou BÚNO na vnější stěně

Věta 1. $ch\prime(G) \geq \Delta(G)$
pro následující typy grafů platí dokonce rovnost :

- bipartitní
- K_{2l+1}
- $\Delta(G) = 3$ a $\chi\prime(G) = 4$
- rovinný, $\Delta(G) \geq 12$
- regulární rovinný G
- vnějskově rov. G s $\Delta(G) \geq 5$

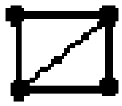
Lemma 1. Vnějškově rovinný 2-souvislý G na p $\geq$ 4 vrcholech obsahuje aspoň 2 nesousední vrcholy stupně 2 ($\exists$ u,v $\in V(G)$; uv $\in E(G)$ a degu = degv = 2)

Dukaz

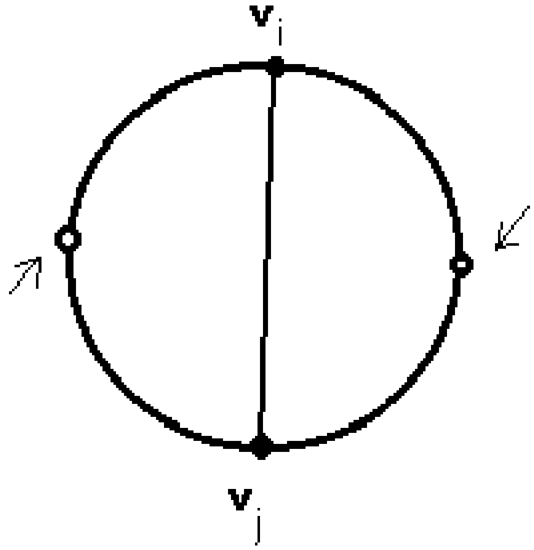
G = $C_p \rightarrow$ triviálně platí

jinak indukcí :

1) $p = 4$ $\surd$



2) $p > 4$, $\mathbf{G} \neq \mathbf{C_p} \Rightarrow \Delta(\mathbf{G}) \geq \mathbf{3} \Rightarrow \exists i,j : (v_i, v_j) \in E(\mathbf{G}) \Rightarrow \exists k,l : (v_k, v_l) \notin E(\mathbf{G})$



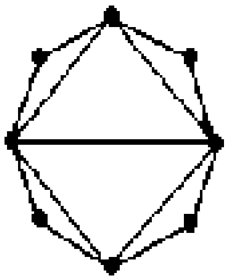
q.e.d.

Lemma 2. G je VR, $\delta(G) \geq 2$, platí aspoň jedno z :

(a) $\exists$ 2 vrcholy stupně 2 se společným sousedem stupně 4

(b) $\exists$ vrchol stupně 2 se sousedem stupně ≤ 3

Dukaz



pozn. : stručně - stačí se podívat na graf bez artikulací : má nějaké vrcholy stupně 2,
kdyby měly všechny za sousedy vrcholy s velkým stupněm nedostávalo by se hran

pozn. k poznámce - protože každá taková hrana si vynutí vrchol stupně 2 atd…

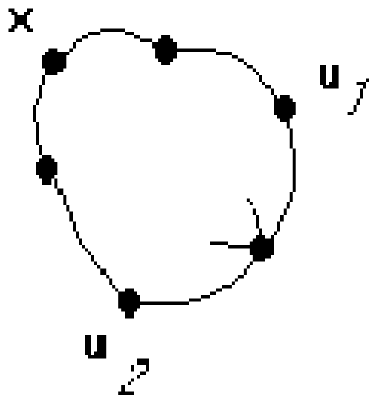
- nakresli G vnějškově rovinně
- zvol blok 2-souvislosti B t.ž. má max 1 artikulaci v (když G je 2-souvislý, v zvol libovolně)
- V(D) = V(B) ∪ N(v)
E(D) = E(B) ∪ { uv: u∈N(v) }

- 1) $| V(B) | \leq 4$
- 2) $| V(B) | \geq 5$ pokud d(j) $\leq$ 3 nebo d(z) $\leq$ 3 $\Rightarrow$ platí (b)

$d(j) \geq 4 \wedge d(z) \geq 4 \Rightarrow$

$$D' = \begin{cases} D - x, & yz \in E(D) \\ D - x + yz, & jinak \end{cases}$$

$| V(D') | = | V(D) | - 1$



- 1) G splňuje (a) $\Rightarrow \exists\, u_1, u_2$ = z,y, t.ž. deg(u_1) = deg(u_2) = 2 ; ∃w $\neq$ y,z
- 2) v D platí (b)
  - α) $D' = D - x + yz,\ y, z \neq u; y, z \neq w$

- β) $D' = D - x$
  * a) $w \neq y, z \longrightarrow$ platí pořád (b)
  * b)$w = y \vee w = z$ po vrácení x mi platí (a)

$d_D(m) = d_D(m) + 1 \leq d_D(m) = 4$

q.e.d.

Věta 1$'$ G je VR s $\Delta(G) \geq 5 \Longrightarrow ch'(G) = \Delta(G)$
Dukaz
dokážeme $\chi'(G) = \Delta(G)$
pozn. plyne triviálně z Lemma 2.
nechť G' je minimální protipříklad

- α) $\delta(G') = 1$, inkriminovaná hrana má jednu barvu do rezervy, takže bez ní je to taky protipříklad
- β) $\delta(G') \geq 2$, pak vždy $\exists$e t.ž. $G' - e$ lze obarvit $\Delta(G)$ barvami $\rightarrow$ G taky $\rightarrow$ spor

q.e.d.

Application of combinatorics to statics-rigidity of grids

Aplikace kombinatoriky ve statistické strnulosti mřížek

N. Radics, A. Recski

Referovala Ida Švejdarová dne 27. 11. 2002
Zapisoval Vlastimil Janda

hrubý abstrakt: mrizka (obdelnikova, prip. s obecnym "tvarem") charakterizovana matici cisel (rotaci) - x_i, y_j, podle toho jak je s cim hnuto (posunuto), v mrizce muzou byt tyce (a kabely), ktere omezuji moznosti jak s mrizkou hybat (jak volit rotace x_i, y_j)

jsou tam jeste nejake linearni rovnice, ktere jsou ke kazdemu tycku mrizku, a davaji nam nejake vlastnosti jako trbea proc je neco a nco neni mozne, hnout zubem a podobne

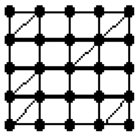
pak je treba zajimavy kolik je treba pridat tyci aby se to nemohlo hnout (bylo to rigidni), a jak to souvisi s grafem poloh tech tyci, kterej je bipartitni a jeho souvislost nebo nesouvislost nam dava jak to je s rigiditou

jde to jeste nejak formalizovat

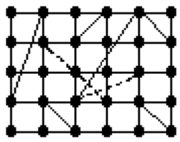
tabulka (kolik je potřeba přidat různých elementů do mřížky, aby se stala rigidní)

	bez děr	s dírami	1 p. (fix)	1 patrové	3D
diag. tyče	k+l-1		k+l+2	k+l+2	k+l+2
dlouhé tyče	k+l-1	k+l-2#děr-1	k+l+2		
diag. kabely	2 max(k, l)		k+l-1		
dlouhé kabely	k+l	k+l-2#děr			

obrázky :



plnou čarou jsou tyče a čárkovanou jsou kabely



A Steiner triple system which colours all cubic graphs

Barvení kubických grafů Steinerovými systémy

Mike Grannell, Terry Griggs, Martin Knor, Martin Škoviera

Referoval J. Kára dne 8. 1. 2003
Zapisoval M. Pergel

Definice 1 (jasných pojmů): O hraně $\{u, v\}$ řekneme, že je přilehlá k vrcholu u (resp.v), minorem grafu G je graf H vzniklý operací vyhození, nebo kontrakce hrany. Tyto pojmy by měly být intuitivně zřejmé, proto je definujeme hned zkraje a jen takto neformálně.
Definice 2: Steinerovým systémem trojic (STS) nazveme $S = (X, M)$, kde $M \subseteq \binom{X}{3}$ a$\forall_{x,y\in X}\exists!_{m\in M}$, že $x \in m \wedge y \in m$.
Tvrzení 3: Existuje STS právě když $|X| \equiv 1$ nebo $3 (\mathrm{mod}\ 6)$.

Ke konstruování obarvení budeme potřebovat projektivní geometrie. Ty obvykle značíme $\mathrm{PG}(n, k)$, nám však postačí případ pro $k = 2$, které vyrobíme jako trojice z dvouprvkového tělesa $Z_2^{n+1} \backslash \{0 \ldots 0\}$. Trojice vybíráme tak, že $\{a, b, c\} \in M \iff a + b + c = o$.

Jako příklad můžeme uvést Fanovu rovinu, která je izomorfni $\mathrm{PG}(2, 2)$, trojici tvoří například $\{0, 0, 1\}, \{1, 0, 1\}, \{1, 0, 0\}$.

Nyní se pustíme do barvení hran 3-regulárních (tedy kubických) grafů pomocí STS:
Definice 4: Nechť $S = (X, M)$ je STS, $G = (V, E)$ kubický graf. Pak S-obarvení je zobrazení $c : E \to X$. Navíc musí platit pro $e, f \in E, e \cap f \neq \emptyset \Rightarrow c(e) \neq c(f)$ a obrazy každé trojice hran, která sdílí společný vrchol, musí tvořit trojici v M.

Použijeme jako faktů následujících dvou vět:
Věta 5 (Škoviera, Holroyd): Budiž G hranově 2-souvislý kubický multigraf bez smyček. Pak jakýkoliv STS S řádu aspoň 3 obarví G.
Věta 6: Nechť G je kubický multigraf bez smyček, $S = \mathrm{PG}(n, 2)$, pak G je S-obarvitelný, pokud G nemá most (tedy je hranově 2-souvislý).
Pozn.: Budeme-li nadále mluvit o 2-souvislosti, budeme tím myslet 2-souvislost hranovou, nikoliv vrcholovou, jak tomu obvykle bývá.

Naším cílem bude ukázat následující:

Věta 7: Existuje STS τ takový, že každý kubický graf je τ-obarvitelný.

Pozn.: τ, které vyrobíme, bude na 381 vrcholu a neví se, zda existuje menší.

Vezměme PG$(6,2)$, tedy $Z_2^7\backslash\{0,\dots 0\}$. Tím získáme strukturu na 127 vrcholech. Stouto projektivní geometrií provedeme operaci zvanou Pasch Switch:

Označíme $a_0 = 1101100$, $b_0 = 1001010$, $c_0 = 0100110$, $a_1 = 1101101$, $b_1 = 1001011$, $c_1 = 0100111$. Na této šestici leží (zkonstrukce) čtyři hyperhrany: $\{a_0,b_0,c_0\}$, $\{a_0,b_1,c_1\}$, $\{a_1,b_0,c_1\}$, $\{a_1,b_1,c_0\}$. Tyto hyperhrany vyměníme za hyperhrany s vrcholy „opačných" indexů, tedy $\{a_1,b_1,c_1\}$, $\{a_1,b_0,c_0\}, \{a_0,b_1,c_0\}, \{a_0,b_0,c_1\}$. Uvědomme si, že vlastnost, že každá dvojice je v právě jedné trojici zůstane zachována! Teď tuto konstrukci (označme ji Z) „znásobíme", tedy vezmeme tři kopie této konstrukce, označíme je Z, Z', Z'', jejich prvky buďte $a_0, a_1, a_2 \dots$, $a_0', a_1', a_2', \dots$ a $a_0'', a_1'', a_2'' \dots$. Do této ztrojnásobené konstrukce přidáme všechny trojice $\{a_i, a_i', a_i''\}$ pro každé i a každou trojici tvaru $\{a_i, a_j', a_k''\}$, kde $\{a_i, a_j, a_k\}$ je hyperhrana v konstrukci Z.

Tím vznikla konstrukce na 381 vrcholu, zbývá dokázat, že „udělá co chceme".

Postupovat budeme barvením B – jednotlivých komponent (hranové) 2-souvislosti grafu$G$. Vzniklá obarvení nalepíme a získáme obarvení celého grafu. Jelikož G je 3-regulární, jsou dvě možnosti, jak může B vypadat:

1. B neobsahuje podrozdělení K_4, nebo
2. B obsahuje podrozdělení K_4.

Definice 8: Grafům, které neobsahují podrozdělení K_4 říkáme sériově-paralelní.

Fakt: Sériově paralelní grafy lze ocharakterizovat tak, že jsou to právě grafy, které lze zkonstruovat z K_2 opakovaným podrozdělováním hran, nebo přidáváním hran paralelních (tj. již vedoucí hranu zdvojíme). Operace přidání paralelní hrany nám vyrobí multigraf, což nám ale s ohledem na to, že věty, které budeme používat, platí pro multigrafy, nevadí.

My budeme chtít grafy ve Faktu popsanými operacemi rozebírat, tj. budeme naopak kontrahovat hrany okolo vrcholů stupně 2, resp. ubírat hrany paralelní. Všimněme si, že pro 3-regulární 2-souvislé grafy lze uvedené dvě operace nahradit operací kontrakce cyklu se dvěma vrcholy stupně 3 na jediný vrchol (ozn. jako operaci SP).

Nyní postupujeme pro první případ, tedy bez podrozdělení K_4. Pak platí, že v sériově paralelním grafu bez podrozdělení K_4 existují na kružnici buďto dva vrcholy stupně 3, nebo žádný. Jeden být nemůže, protože pak

bychom měli v hranově dvojsouvislém grafu most, více než dva by implikovaly podrozdělení K_4, které předpokládáme, že zkoumaný graf neobsahuje.
Lemma 9: Dvojsouvislý sériově paralelní graf s maximálním stupněm nejvýše 3 je hranově 3-obarvitelný.
Důkaz: Indukcí: Kružnici hranově obarvíme třemi barvami snadno. Dále použijeme operaci SP, tedy kontrahujeme kružnici do vrcholu, obarvíme (z indukčního předpokladu) aposléze dobarvíme kružnici (je třeba rozebrat 3 možnosti, tedy jsou-li mezi těmi dvěma vrcholy obě cesty sudé délky, obě liché délky, nebo jedna sudé, druhá liché – pro případ obou cest sudé délky barvíme (přichází-li do kružnice barva a a odchází b) jednu cestu střídavě barvami c a a, druhou pak b, c, ostatní jsou podobné a též velmi snadné).
Definice 10: G je téměř kubický (dále jen TK), pokud má jen vrcholy stupně 1 nebo 3.

$G^{\#}$ označíme pro G TK G bez vrcholů stupně 1, tedy G indukovaný na vrcholech stupně 3.
Lemma 11: Nechť G je souvislý graf G_1 označme minor G vzniklý kontrakcí hran přilehlých k vrcholům stupně 2, je-li $G_1^{\#}$ 2-souvislý a obsahuje podrozdělení K_4, pak G je 3-obarvitelný tak, že mosty dostanou jednu specifickou barvu z.
Důkaz: $H = G^{\#}$ po kontrakci vrcholů stupně 2 (může být multigraf). Ten lze podle věty5 obarvit i Fanovou rovinou. Tím dostaneme $\Phi_1 \dots Q$-obarvení H. Pokud jsme žádný vrchol stupně 2 nekontrahovali, je obarveno. Jinak vložíme kontrahované vrcholy zpátky, každou z nově vzniklých (podrozdělených) hran obarvíme tak, jak byla obarvena původní podrozdělovaná hrana v grafu H. Tak získáme nekorektní obarvení Φ_2. Vrcholy vzniklé podrozdělováním označme $v_1 \dots v_k$. V případě, že k je liché, použijeme toho, že G obsahuje podrozdělení K_4. V tom případě vezměme x – vrchol, který je společným vrcholem nějakých tří kružnic oné podrozdělené K_4 a označme jej v_{k+1}. Vrcholy $v_1 \dots v_k$ (případně až v_{k+1}) spárujeme. Tak vznikne $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ párů. Cesty mezi vrcholy těch párů označme $L_1 \dots L_{\lceil \frac{k}{2} \rceil}$. V dalším textu použijeme značku

$$c_P(e) = \begin{cases} 1, \text{ pro } e \text{ ležící na cestě } P, \\ 0, \text{ jinak.} \end{cases}$$

Nyní vyrobíme obarvení Φ_3 takto:

$$\Phi_3(e) = \Phi_2(e) + \left(\sum_{i=1}^{\lceil \frac{k}{2} \rceil} c_{L_i}(e) \right) \cdot z; \qquad \Phi_3(\text{mosty}) = z.$$

Jelikož počítáme s vektory modulo 2, změní se mezi obarveními Φ_2 a Φ_3 toto: Některým hranám se barva zvýší o z, ostatním zůstane. Toto obarvení bude „skoro dobré“, tedy bude dobré pro všechny vrcholy v_k, které jsme „dekontrahovali“ při rekonstrukci grafu G zgrafu H, protože těmto se oz zvýší barva jedné sousední hrany. Barvou z utéhož vrcholu bude obarvena hrana vedoucí ksousedícímu vrcholu stupně 1 (jehož existence plyne ztoho, že G byl TK a toho, jak jsme vyráběli graf H a zpět z něj rekonstruujeme graf G). K tomuto zvýšení u právě jedné přiléhající hrany dojde proto, že cesty $\{v_i \to v_j\}$, na nichž v_k neleží, do výpočtu nového obarvení k němu přiléhajících hran nezasáhnou, cesty, na nichž v_k leží, ale není krajním bodem, změní hodnotu obou přiléhajících hran a právě jedna cesta, jíž je v_k krajním bodem, změní obarvení právě jedné přiléhající hrany. Uvědomme si, že teď už máme (ze stejného důvodu dobře obarvené i všechny vrcholy, které měly v H stupeň 3 kromě x v případě, že jsme z něj udělali vrchol v_{k+1}.

V této chvíli vidíme, že byl-li „dekontrahován“ sudý počet vrcholů (rozuměj v posloupnosti $v_1 \dots v_k$ bylo k sudé), máme zadaný graf G korektně obarvený a to například tak, že graf H obarvíme Fanovou rovinou, tedy vektory přiřazené jednotlivým hranám budou tvaru $(a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0, 0)$, barva z bude $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Problém nastává, změní-li se nám nežádoucně barva lichého počtu hran přiléhajících k x. Pro tento případ budeme vyrábět obarvení Φ_4 s využitím toho, že x je společným vrcholem kružnic c_A, c_B a c_C. Obarvení Φ_3 vytvořilo barvy tvaru $(a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0, a_4)$. Speciálně barvy přidělené hranám přiléhajícím k x označme:

$$(p_1, p_2, p_3, 0, 0, 0, p_4),$$
$$(q_1, q_2, q_3, 0, 0, 0, q_4),$$
$$(r_1, r_2, r_3, 0, 0, 0, r_4).$$

Víme, že $p_4 + q_4 + r_4 = 1$. Pro výrobu obarvení Φ_4 budeme označíme tyto tři vektory:

$$p = (q_1 + 1, q_2, q_3, 0, 0, 1, 0),$$
$$q = (p_1 + 1, p_2 + 1, p_3, 0, 1, 0, 0),$$
$$r = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0).$$

Samotné obarvení definujeme takto:

$$\Phi_4(e) = \Phi_3(e) + c_A(e) \cdot p + c_B(e) \cdot q + c_C(e) \cdot r$$

Toto obarvení udělá přesně to, co chceme, protože pro vrchol ležící na jedné nebo dvou kružnicích, který už byl dobře obarven k právě dvěma hranám přičte stejnou konstantu, která se, jelikož počítáme stále modulo 2, zruší. O vrcholy, které byly dobře obarveny tedy je dobře postaráno i tentokrát, zbývá ověřit, co se stane u vrcholu x, kvůli kterému jsme obarvení Φ_4 vyráběli. Tam snadno numerickým výpočtem zjistíme, že barvy přilehlých hran se změní takto:

$$(p_1, p_2, p_3, 0, 0, 0, p_4) \to (1, 1, 0, 1, 1, 0, p_4),$$

$$(q_1, q_2, q_3, 0, 0, 0, q_4) \to (1, 1, 0, 1, 1, 0, q_4),$$

$$(r_1, r_2, r_3, 0, 0, 0, r_4) \to (0, 1, 0, 0, 1, 1, r_4).$$

Jelikož víme, že $p_4+q_4+r_4 = 1$, tak trojice barev okolo vrcholu x zjevně vytvoří ve Steinerově systému trojic, kterým barvíme, trojici vzniklou operací Pasch switche.

Shrnutí: Zbývá dokázat větu 7, což uděláme tak, že graf G rozdělíme na komponenty 2-souvislosti, které buďto nebudou obsahovat podrozdělení K_4, pak je obarvíme podle lemmatu 9 třemi barvami z, z' a z'' (proto jsme museli konstrukci projektivní geometrie ze Z_2^7 trojnásobit, všimněte si, že obarvení bude korektní) a mosty z nich vedoucí dobarvíme zbývající třetí barvou (3-regularita). Pokud dotyčné komponenty dvojsouvislosti podrozdělení K_4 obsahují, pak k dané komponentě přidáme i všechny mosty s ní sousedící a postupujeme podle lemmatu 11. Důležité je, že mezi žádnými dvěma komponentami 2-souvislosti nevede více než jedna (hranově disjunktní) cesta (protože jsou to komponenty hranové 2-souvislosti), budou nám tudíž jednotlivé komponenty (po kontrakci do jednoho vrcholu) tvořit strom, který budeme stavět lepením listů jak budeme postupně barvit jednotlivé komponenty dvojsouvislosti. Strom nám bude určovat, kterou třetinu barvícího systému pro příslušnou komponentu máme použít (obsahuje-li podrozdělení K_4), případně jak zapermutovat barvy z, z' a z''.

Nyní, když už máme obarveno, na úplný závěr poznamenejme, že není známo, zda tato konstrukce je optimální, nebo ne. To je nejspíš stále předmětem výzkumu.

The Maximum Number of Edges in a Three-Dimensional Grid-Drawing

Maximální počet hran v 3D nakreslení grafu

P. Bose, J. Czyzowicz, P. Morin, D. R. Wood

Referoval David Štěrba dne 4. 12. 2002
Zapisoval David Štěrba

Třídimenzionální nakreslení grafu do mřížky (grid-drawing):

Vrcholy: jsou umístěny v bodech $\mathbf{Z}^3$

Hrany: úsečky spojující 2 vrcholy (jako koncové body) a neprotínající jiné vrcholy; dvě hrany mají společné nejvýše koncové body
Bounding box 3D-nakreslení grafu je kvádr, s hranami rovnoběžnými s osami, který obsahuje nakreslení grafu (zřejmě nejmenší takový).
$X \times Y \times Z$ *grid-drawing* rozumíme 3D-nakreslení, takové, že bounding box obsahuje hrany a X, Y a Z mřížových bodů (ve směru každé z os).
Objem 3D-nakreslení je počet mřížových bodů v bounding boxu. Objem $X \times Y \times Z$-nakreslení je XYZ. (Tedy i 2D-nakreslení grafu mají kladný objem.)
Každý simple graf má 3D-nakreslení, my se budeme zabývat nakresleními s malým objemem.
Věta 1 (v dimenzi 3)
Maximální počet hran mřížového nakreslení $X \times Y \times Z$ je právě

$$(2X-1)(2Y-1)(2Z-1) - XYZ.$$

Důkaz
Uvažujme $X \times Y \times Z$ mřížové nakreslení grafu G s n vrcholy a m hranami.
Nechť $P = \{(x,y,z) : (x,y,z) \in BBox(G) \wedge 2x, 2y, 2z \in \mathbf{N}\}$.
Je zřejmé, že $|P| = (2X-1)(2Y-1)(2Z-1)$. Střed každé hrany v G je v P a žádné dvě hrany nemají společný střed. Tedy $m \leq |P|$. Navíc, střed hrany neprotíná vrchol.
Tedy $m \leq |P| - n$.

Nakreslení s maximálním počtem hran je takové, že žádná hrana neprochází mřížovým bodem, jinak rozdělíme hranu na dvě a přidáme do bodu vrchol. Tedy $n = XYZ$ a $m \leq |P| - XYZ$.
Konstrukce
v každé jednotkové krychli natáhneme tyto hrany:
1) úsečky podél hran
2) diagonální úsečky na stěnách
3) tělesová-diagonální úsečka
Snadno nahlédneme, že počet souhlasí, protože ke každé takové úsečce přiřadíme jeden bod z $P \setminus \mathbf{Z}$, který prochází středem. $\square$

Věta 2 (v dimenzi d)
Nechť $B \subseteq \mathbf{R}^d$ je konvexní množina. Nechť $S = B \cap \mathbf{Z}^d$ je množina mřížových bodů v B. Maximální počet hran v mřížovém nakreslení lomenou čarou s bounding boxem B je jenvýše $(2^d - 1)|S|$.
Jestliže $B = X_1 \times \ldots \times X_d$ mřížový kvádr, potom maximální počet hran je právě

$$\prod_{i=1}^{d}(2X_i - 1) - \prod_{i=1}^{d} X_i.$$

Důkaz
Definujeme podobně $P = \{x \in B : 2x \in \mathbf{Z}^d\}$. Uvažme nakreslení do mříže lomenou čarou s bounding boxem B. Střed každé hrany leží v P a žádné dvě hrany nemají společný střed. V nakreslení s maximálním počtem hran neprochází žádná hrana mřížovým bodem, jinak hranu v tomto bodě rozdělíme a přidáme nový vrchol. Tedy počet hran je nejvýše $|P| - |S| \leq (2^d - 1)|S|$.
Jestliže B je $X_1 \times \ldots \times X_d$ mřížový kvádr, potom $|P| - |S| = \prod_{i=1}^{d}(2X_i - 1) - \prod_{i=1}^{d} X_i$.
Konstrukce:
Každé jednotkové hyperkrichli dimenze d', kde $1 \leq d' \leq d$, je jednoznačně přiřazen jeden bod $x \in |P| \setminus |S|$. Bod x je středem takové úsečky, která spojuje protilehlé vrcholy v hyperkrychli. Hrany se protínají pouze v mřížových bodech, protože jednotkové hyperkrychle^d se protínají podél hranice. Každý bod z P je buď vrchol nebo střed úsečky, tedy počet hran je přesně $|P| - |S|$. $\square$