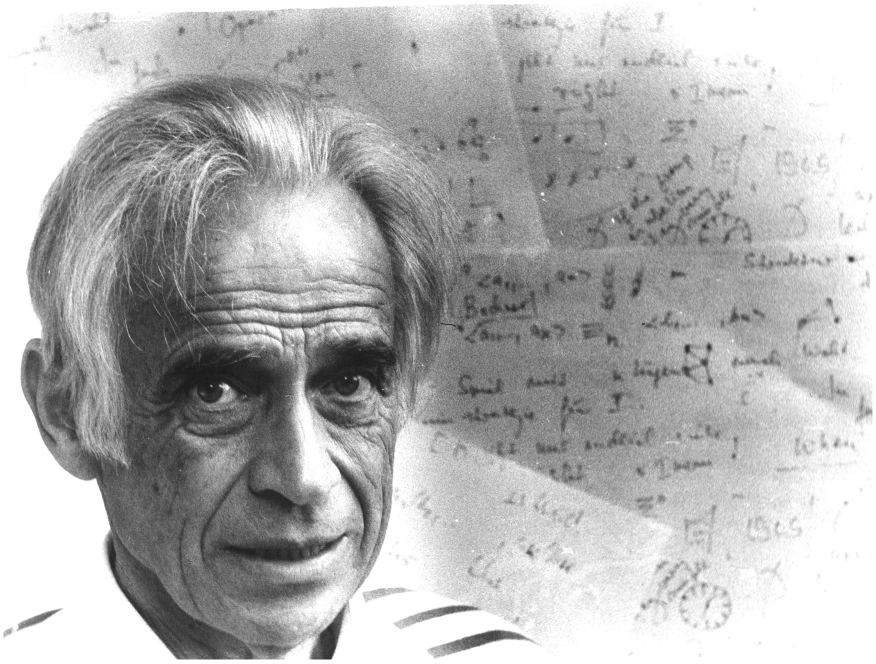
44. KAM Matematické kolokvium přednesl dne 5. března 2002 prof. dr. Ernst Specker. Jeho osobnost je představena krátce v pozvánce ke kolokviu. Protože se jedná o mimořádnou událost, KAM a ITI s laskavým svolením přednášejícího vydaly vzpomínkovou publikaci, která zahrnuje české překlady jeho článků „Postmoderne Matematik: Abschied vom Paradises?“ a „Die Logik oder Die Kunst des Programmierens“. Obě vyšly v Ernst Specker: Selecta (ed. G. Jäger, H. Läuchli, B. Scarpellini, V. Strassen), Birkhäuser Verlag, 1990; Děkuji Ernstovi Speckerovi za laskavé poskytnutí podkladů a dr. M. Klazarovi, H. Nyklové, R. Bartákovi a J. Hubičkovi za pomoc s tímto číslem KAM-DIMATIA Serií.

J. N.



(foto J. P. Jäger)

44. MATEMATICKÉ

KOLOKVIUM

MODULAR COUNTING

Prof. Ernst Specker

(ETH Curych)

5. března 2002
16:00 hodin
Posluchárna K9
Sokolovská 83
186 75 Praha 8

Katedra aplikované matematiky (KAM)
Institut teoretické informatiky (ITI)
MFF UK

MODULAR COUNTING

Ernst Specker

(ETH Curych)

Suppose that the cardinality n of a certain set is determined to be 6942 in one paper and 7181 in another. What should we do? We can try to decide whether n is even or odd. In order to find an answer to such a problem, it is often advantageous to generalize it. If e.g. we want to know whether the number of different equivalence relations on a set of 1000 elements is even or odd, we study the function B where $B(n)$ is then the number of equivalence relations on a set of n elements. It is easy to see that the $B(n)$ mod 2 is periodic; the period being 3, the parity of $B(1000)$ is equal to the parity of $B(1)$, i.e. $B(1000)$ is odd. Does a corresponding theorem hold for the function which counts the number of 3-colourable graphs on a set of n elements? The aim of the talk is to characterize structures for which the answer is positive.

Oznámení přednášky

Na začátku března 2002 navštíví Prahu

Ernst Specker

emeritní profesor na ETH Curych. Během svého pobytu přednese v úterý 5. března 2002 v 16:00 hodin v posluchárně K9, Sokolovská 83 — všimněte si, prosím, neobvyklého místa konání —

44. MATEMATICKÉ KOLOKVIUM

pod názvem

MODULAR COUNTING

Prof. Ernst Specker se narodil v r. 1920 a celou svou vědeckou kariérou je spojen s ETH Curych (profesor od r. 1955). Nejdříve byl ovlivněn především Gonsethem, Hopfem, Bernaysem a dalšími světově proslulými matematiky, kteří působili v Curychu. V počátcích své matematické dráhy pracoval několik let na IAS v Princetonu. (Dle vlastního vyjádření: „Co byl Řím pro Goetha, byl Princeton pro mne.") Snad odtud pramení rozmanitost Speckerovy tvorby, která není velká rozsahem, ale pronikavostí, rozmanitostí a filosofickou hloubkou. Život ETH ovlivnil především jako vedoucí logického semináře (vedeného nejprve spolu s P. Bernaysem, posléze s H. Läuchli), který vlastně pokračuje dosud, a semináře o algoritmických problémech (vedeného spolu s V. Strassenem).

Speckerova práce zasáhla do několika matematických oborů a je stále citována. Jmenujme alespoň matematickou logiku a teorii modelů, teorii množin (Ramseyova teorie), teorii rekurze (Speckerova posloupnost), teorii složitosti (Speckerova–Hodesova věta) a teorii grafů (Speckerovy grafy). V 60-tých letech se věnoval rovněž experimentální psychologii a teoretickým otázkám učení a poznávání. To ovlivnilo jeho pedagogickou práci a přístup ke studentům, který Hao Wang v úvodu k *Logic and Algoritmics — An international symposium held in honour of Ernst Specker* (L'Enseingment Mathématique, Genève, 1982) popsal slovy: „(Specker) ... je více zdrženlivý, méně soutěživý a více porozumějící. Domnívám se, že má lepší smysl pro to, co je v životě důležité, a uspořádává si svůj život lépe než většina logiků."

Je nám ctí, že přednese v Praze přednášku.

Jaroslav Nešetřil

Postmoderní matematika: Rozloučení s rájem?

Ernst Specker[1]

Resumé

Aby se v přírodních vědách mohla uplatňovat moderní infinitní matematika, vytvořili si lidé odpovídající obraz světa. Gnomové učinili podobný krok v obchodu — knihy například prodávají v neuvěřitelném ba nekonečném množství. Tím vznikající problémy se zde rozebírají v jakémsi skřítka a člověka dialogu, a nastiňuje se cesta od moderní k postmoderní matematice.

Byl večer Tříkrálový, přibližně v tuto hodinu. Seděl jsem v teplém pokoji, v ruce rukopis a snažil se překontrolovat nějaký výpočet. Ale myšlenky mi odbíhaly. Myslel jsem na Dietera Röddinga, na jeho práce a na knihu, kterou věnujeme jeho památce. Myslel jsem na Eulera a jeho latinské čtverce. Myslel jsem na Galoise a jeho absurdní souboj. Kdyby byl Galois zůstal déle živ, byl by se trápil tím, jestli matematici mluví o „konečných tělesech" nebo o „Galoisových tělesech"?

Prásk — rána, na „Galoisovi" přistál brouček se sedmi puntíky! „A tobě, mám ti říkat »beruška«,»boží hovádko« nebo, »boží beránek«?" Asi jsem přemýšlel nahlas, protože od kamen zaznělo „To pravé jméno je »sluněčko sedmitečné«!" Jak se podívám stranou, sedí tam mužíček a klátí nohama. Mám se pustit do diskuse o názvu coccinelae? Důležitější je ukázat, kdo je tu pánem v domě a kdo trpaslíkem ze zahrádky! Tak se ho ptám: „A tvoje pravé jméno, jak zní?" A na to trpaslík: „Já nepotřebuji žádné pravé jméno,

[1] Závěrečná přednáška před emeritováním na Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 18. února 1987. Text je zkrácená verze přednášky. Přeložila H. Marxová

teď se jmenuji tak a hned zase jinak. Ale můj lid, to jsou skřítkové a to je také jejich pravé jméno. A ty, k jakému lidu patříš ty?"

Ten skrček se mi začíná líbit a proto mu odpovídám smířlivě: „Tak jako ty jsi gnom, tak já jsem Curyšan." Tu se krátce zasměje, způsobně hodí nožičky jednu přes druhou a chce vědět. „Co to čteš?" „To je práce o latinských čtvercích. Z takových čtverců vznikají magické čtverce — o to se přece určitě zajímáš!". To jsem raději neměl říct. „Ach vy Curyšané. U vás jsou Appenzellští mazaní, Basilejští vtipní a my skřítkové se zase zajímáme o magické čtverce!"

„Ne", pokračuje klidněji „s takovými hračičkami jsme u nás skončili. Naše matematika je čistá a aplikovaná." „Jak to obojí spojujete? A jestli je mi dovolena otázka: ty jsi matematik?" „Studoval jsem matematiku; teď jsem činný na knižním trhu, vydávám edici matematických knih v kapesním formátu." „A jak se ta edice jmenuje?" „Naše přirozená čísla", odpověděl, „ta řada vychází v nakladatelství Oberon — ano, Oberon jsem já, to jsi už jistě uhodl." „A kolik dílů ta tvoje edice už má?" Podíval se na mě s údivem: „Kolik dílů? Díl 0 jedná o čísle 0, díl 1 o čísle jedna, a tak dále — každý díl jedná o jednom čísle a každé číslo se probírá v jednom díle. Tak jak se vůbec můžeš ptát: Kolik dílů?" „Jako čistou matematiku to mohu dobře pochopit," pokouším se navázat, „ale k čemu se to hodí? Má to nějaké aplikace? Jakpak se ty knihy objednávají a dodávají?" „To je přece docela jednoduché", poučuje mě, „Máš-li třeba přednášku o prvočíslech a chceš pro každého ze svých 12 posluchačů objednat po jednom svazku, ale pro sebe jen díly o prvočíslech vyšších než 1000 (— ta malá přece znáš), tak definuješ posloupnost $a(n)$ následovně:

$$\begin{array}{ll} a(j) := 0 & \text{když } j \text{ není prvočíslo} \\ a(j) := 12 & \text{když } j \text{ je prvočíslo a } j \leq 1000 \\ a(j) := 13 & \text{když } j \text{ je prvočíslo a } 1000 < j \end{array}$$

Potom objednáš

$$\sum_{j=0}^{\infty} a(j) B_j \ .$$

(kde B_j je symbol označující díl j)." „Tak to je tedy báječné!" vykřikuji ironicky, „Já budu definovat

$$\begin{array}{ll} b(j) := 1 & \text{když obě císla } j \text{ a } j+2 \text{ jsou prvočísla} \\ b(j) := 0 & \text{jinak} \end{array}$$

a dám Vám objednávku na

$$\sum_{j=0}^{\infty} b(j)B_j \ .“$$

„A co je na tom báječné?“ „No, při dodání zjistím, jestli dostanu konečný nebo nekonečný počet knih a potom vím zda existuje nekonečný počet prvočíselných dvojčat nebo ne.“

„Děláš si legraci? Ty knihy se přece nedodávají materiálně! Snad jsem měl říci jasněji: »Získáš pouze opci a s tou pak můžeš disponovat.« To je přece jasné, že jen tak je možný moderní knižní obchod.“

„Ano, to chápu. A jak je to s cenami?“ „Ceny jsou v Mong. Od doby Velké Inflace existuje jen jedna jednotka a ne fränkly a räply jako u vás. A ještě něco: Knihy se mohou objednávat i v negativním počtu a také určité ceny jsou negativní.“ „Ano“, říkám na to já, „to pomalu začíná i u nás. Za nového ředitele se prý v Curyšské činohře dostane za jedno obsazené místo 20 až 50 franků.“ Pak jsem si od Oberona dal přesně vysvětlit funkci cen. Chci ji teď reprodukovat matematicko-humánním způsobem:

Dodávky se mohou sčítat:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j B_j + \sum_{j=0}^{\infty} b_j B_j = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j + b_j) B_j$$

(kde a_j, b_j jsou celá čísla). Cenová funkce přiřazuje každé dodávce jedno celé číslo (které nazýváme cena P dodávky). Přitom se cena součtu dodávek rovná součtu cen

$$P(\sum a_j B_j + \sum b_j B_j) = P(\sum a_j B_j) + P(\sum b_j B_j).$$

Z toho vyplývá, že cena je rovna 0, jestliže z každého svazku je objednáno 0 exemplářů. Samozřejmě platí také

$$P(\sum_{j=0}^{n} a_j B_j) = \sum_{j=0}^{n} a_j P(B_j) \ .$$

To znamená, že u konečných dodávek se cena skládá z cen jednotlivých knih. Takové konečné objednávky se prý — jak mě ujišťoval Oberon — vždy projeví jako študentské žertíky.

Pozorně jsem si to vyslechl. Pak jsem Oberonovi řekl: „Študentské žertíky stranou, je jasné, že cena dodávky závisí jedině na počtu objednaných exemplářů n prvních svazků.“ „To přece není možné! Jestliže položím $n = 0$ a objednám jeden exemplář dílu 1, tak to stojí 12000 Mong. Podle tvého výpočtu dostanu ale 0.“ „Tak to není myšleno; ta věta zní: ke každé cenové funkci P existuje číslo n, s tou vlastností, že cena dodávky závisí jedině na počtu objednaných exemplářů prvních n dílů. Formálně vyjádřeno:

$$P(\sum_{j=0}^{\infty} a_j B_j) = P(\sum_{j=0}^{n} a_j B_j) \ .\text{“}$$

„Ale jak tohle n určíš?“ „Nu, určím nejprve číslo n tak, že každý díl s číslem vyšším než n má cenu nula, tedy $P(Bj) = 0$ pro $j \geq n$. Pro takové n pak snadno dostaneme větu.“

K tomu se Oberon vyjádřil takto: „Jako gnom to mohu dobře chápat — moje babička také říkávala: Když všechno má svou hodnotu, tak skoro nic nemá cenu. Ale matematicky? Chci slyšet důkaz!“

„Já ti ho rád povím. Ale varuji tě: je to typický důkaz z ráje moderní matematiky a nejsem si jist, že se ti tenounký vzduch v této zahradě bude líbit!“ Škubl s sebou Oberon? Pro všechny případy jsem honem začal s tím důkazem. Kdo by ho chtěl také poznat, budiž odkázán moji na práci „Součtové grupy posloupností celých čísel“.

Oberon si ten důkaz pozorně vyslechl, ale pak prohlásil: „Vám ten důkaz může připadat jako z ráje, ale pro mě je to holé šílenství. A jestliže je dokazatelné, že skoro všechno nestojí nic, lze zajisté dokázat mnohé další věci, které odporují všem zkušenostem.“ „To máš pravdu“, souhlasím, „tak se například dokazuje následující věta: plnou kouli o poloměru 1 lze rozložit na 5 dílů tak, že z těchto dílů lze potom složit 2 plné koule o poloměru 1 — ty díly je nutno jen trochu pootočit a posunout.“ Na to Oberon: „Můžeš mi ten důkaz předvést?“ „Ten není bohužel tak jednoduchý. Když ale nebudeš trvat na 5 kusech a přiznáš mi jich 40, pak ten důkaz mohu za půl hodiny přednést.“

Oberon vrhá krátký pohled na své hodinky — takové hezounké gnatch — a říká lítostivě: „Bohužel nemám příliš mnoho času. Ale jedno bych přece jen chtěl vědět: Neexistuje u vás nikdo, kdo by proti takové matematice protestoval?“ „Ale ano, od té doby co existuje, je také kritizována. Tento druh matematiky vychází v podstatě z Cantora, to bylo asi před 100 lety. Ale kritika vyznívá naprázdno. Dalo by se říci: kritika má sice lepší argumenty, ale protikritika má lepší hesla.“ „A jaká jsou to hesla?“

„Ve své slavné práci »O nekonečnu« napsal Hilbert asi toto: »Z ráje, který nám stvořil Cantor nás nemá nikdo smět vyhánět.« Cantorův ráj, to je ten svět, ve kterém vše co lze považovat za možné, také skutečně existuje. Tedy nejen nekonečně mnoho knih, nýbrž také pro každou možnou dodávku jednoho objednatele, nespočetně mnoho objednatelů, řekl by Cantor. A to bylo právě podstatné pro ten důkaz. Jestliže jsou připuštěny pouze objednávky s vypočítatelnou početní funkcí, pak se skutečně může stát, že nekonečně mnoho jednotlivých knih bude něco stát.“ Oberon přikývl, zřejmě mu byla taková věta také známá, „A jakýpak je tvůj názor, mohl bys mi to krátce popsat?“

„Nuže,“ a nasadil jsem tón k malé přednášce, „jestliže hesla mají větší váhu než argumenty, pak se v zásadě nediskutuje o formulovaném problému. To bych chtěl udělat a použít přitom následující vlastnosti matematického myšlení: pro řešení úkolu jsou často potřebné prvky, které nejsou obsaženy ani ve stanovení úkolu ani ve výsledku. Jak to je míněno, vysvětlím pomocí příkladu převzatého ze zmíněného Hilbertova článku »O nekonečnu«. Byl to přece Hilbertův program, zajistit důkazem Cantorův ráj. Ten důkaz by měl být proveden na absolutně nenapadnutelné bázi — totiž na finitním stanovisku. Toto stanovisko objasňuje Hilbert Euklidovým důkazem věty, že ke každému prvočíslu p_0 existuje větší prvočíslo. K předložení důkazu na konkrétním příkladu, se volí (tenkrát v roce 1925 nejvyšší známé) prvočíslo (39 míst)

$$170\ 141\ 183\ 460\ 469\ 231\ 731\ 687\ 303\ 715\ 884\ 105\ 727.$$

Uvažujme poté čísla $p_0+1, p_0+2, p_0+3, \ldots, p_0!+1$ $(p_0! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots p_0)$ a dokážeme, že jedno z těchto čísel je prvočíslo. Jestliže nás zajímá, jak asi velká musí být nástěnná tabule, na kterou lze napsat $p_0!$, potom zjistíme (při jedné číslici na mm^2) že velikost tabule je jeden světelný rok na druhou.

Dnes jsou známa mnohem větší prvočísla explicitně — já jsem se například jedno naučil nazpaměť:

$$p_1 = 111\ldots 11 \quad (1031 \text{ číslic } 1).$$

Nápad vypsat $p_1!$ je stejně fantaskní jako představa aktuálního nekonečna. Co by tedy bylo „postmoderním“ důkazem existence stále větších prvočísel? Euklidova věta by k tomu účelu nejprve musela být zesílena asi na větu: Ke každému pořadovému číslu n existuje prvočíslo s n místy. V moderní a také klasické matematice platí tato věta, ale dosud platné důkazy neposkytují žádný algoritmus pro výpočet po číslicích, u kterého by vyložená námaha stála v rozumném poměru k velikosti výsledku. Jsme ovšem už velmi blízko pravému řešení. Připustíme-li minimální pravděpodobnost omylu, pak je úkol vyřešen. Role, kterou v matematice dosud hrála nespočitatelná množství a výpočty kosmických rozměrů, přitom přechází na náhodu."

„Chápu tě správně", přerušuje mě Oberon, „vy tedy při dokazování riskujete omyl?" „Ano, to děláme, to také patří k postmoderně! Samozřejmě ne u všech důkazů. Určité důkazy mají objasnit tvrzení a souvislosti — tady omyl není přípustný. U jiných důkazů se nejedná o pochopení — u počítačového důkazu prvočíselnosti čísla s 100000 místy nemůže být vůbec žádná řeč o pochopení. Ale empiricky viděno existuje v takovém případě, i u teoreticky bezvadného důkazu, určitá možnost omylu: Vždycky se může stát, že »6« se přečte jako »9«."

Pozoruji, že Oberon ztrácí klid. Klouže po lavici sem a tam a dívá se na hodinky. „Promiňte", říká, „my dnes máme slavnostní rozloučení s jedním kolegou. Já tam mám mít malý proslov." „A už jsi připravený?" „Jistě samozřejmě! Zvláště dobře se mi podařil závěr té řeči. Já jsem se v mládí naučil nazpaměť osmou elegii Rilkeho; její poslední sloka je jako stvořená pro takovou příležitost. Znáš osmou elegii?" „Samozřejmě ji znám!" A tak recitujeme unisono:

> Kdo nás tak pokroutil, že naše držení,
> ať chcem či nechceme, je obraz kohosi,
> kdo zvolna odchází? A kdo se najednou,
> když pracně vystoupal poslední vršek,
> odkud smí přehlédnout celé své údolí,
> naposled ohlédne, zastaví a sečká.
> To je, jak žijeme a opakujeme odchod.[2]

Literatura

HILBERT D., Über das Unendliche, Math. Annalen 95 (1926), 161–190.

KULL H. a SPECKER E., Direct construction of mutually orthogonal Latin squares, Lecture notes in computer science 270 (1987), 224–236.

REKES Titania, Briefe an einen Gartenzwerg, Quedlinloch Zürich, 1987, ISBN 5-1234-5678-3/ISBN 3-8765-4321-5.

RILKE Rainer Maria, Duineser Elgien, Leipzig 1923; český překlad J. Gruša: Elegie z Duina, Odeon 1999

[2] překlad Jiří Gruša

SOLOVAY R. a STRASSEN V., A fast Monte-Carlo test for primality, SIAM J. Computing 6 (1977), 84–85.

SPECKER E., Additive Gruppen von Folgen ganzer Zahlen, Portugaliae Mathematica 9 (1950), 131–140.

STROMBERG K., The Banach-Tarski Paradox, Am. Math. Monthly 86 (1979), 151–161.

WILLIAMS H. C. a DUBNER H., The primality of R 1031, Mathematics of Computation 47 (1986), 703–711.

Logika aneb umění programování

Ernst Specker[3]

Základní myšlenky logického programování jsou ilustrovány na příkladě hry pro velmi trpělivé hráče (Hanojské věže). Možné pozice této hry tvoří graf, v němž se dvě pozice spojí hranou, pokud to vyplývá z legálního tahu. Tento graf lze interpretovat dvojím způsobem: jednak v našem materiálním světě pomocí rozmnožovacího procesu (stroje), jednak v ideálním světě Herbranda pomocí logického programování logiky.

Úvod

Až do 19. století byla na univerzitách vyučována logika, aby budoucí duchovní, právníci a lékaři byli obeznámeni s uměním správného myšlení. Jedno z klasických děl pro tuto výuku byla „La logique ou l´art de penser“ od A. Arnauda a P. Nicolea, vydaná v roce 1662. Mezitím bylo upuštěno od snahy navodit výukou logiky správné myšlení, a to pravděpodobně méně na základě proměny klasické logiky v matematickou disciplinu, než z přesvědčení, že správné myšlení v jednom oboru může být vyvíjeno pouze ve stálém vypořádáváním se s oborem samotným a nedá se prostě přivádět zvenku na základě obecných principů.

Logici tím ztratili velkou část svých studentů. Tím radostnější je pro ně, že se podařilo nalézt nové cílové publikum. Prokázalo se totiž, že určité logické jazyky jsou vynikajícími programovacími jazyky a že to, co se v logice zkoumá pod pojmem „důkaz“, může být také chápáno jako výpočet

[3] Vyšlo ve Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich (1989) 134/2 : 139–150. Přeložila H. Marxová.

nebo zpracování dat. Nejznámější z těchto nových programovacích jazyků je PROLOG (PROgramování v LOGice).

Nejjednodušší základní myšlenky logického programování objasníme na konkrétním příkladu tzv. Hanojských věží. Tuto úlohu popsal E. Lucas jako hru trpělivosti. (Vynález připisuje Lucas Mandarinovi N. Clausovi na siamském kolegiu Li-Sou-Stian. V kterém francouzském kolegiu Lucas asi vyučoval?) Přitom není naším cílem problém Hanojských věží vyřešit, nýbrž chceme ukázat, jak se jimi definovaná struktura dá definovat v „Herbrandově universu"; s logickým programováním. Budeme postupovat ve dvou krocích. V prvním kroku přiřadíme ke struktuře graf a ukážeme, jak se tento graf dá realizovat v našem materiálním světě pomocí zdvojení a kreslení nových hran. Při druhém kroku jsou tyto konstrukce v ideálním světě Herbrandova universa (Jacques Herbrand, 1908–1931) formulovány pomocí logických prostředků.

Hanojské věže jako graf.

Jako materiální objekt se Hanojské věže sestávají z jedné desky, do které jsou zapuštěny tři tyče, a z několika (např. 4) uprostřed proděravělých kotoučů různé velikosti. Ve výchozí pozici se nacházejí všechny kotouče seřazeny na jedné tyči ve tvaru pyramidy. Úkol spočívá v tom, jak přenést tuto pyramidu řadou legálních tahů na jinou tyč. Legální tah přitom znamená: z jedné tyče se sejme vrchní kotouč a položí se (navrch) na jinou tyč, přitom smí být položen pouze na desku nebo na větší kotouč (obr. 1).

Označme tyče písmeny a, b, c a kotouče podle velikosti čísly $1, 2, 3, 4$ (největší).

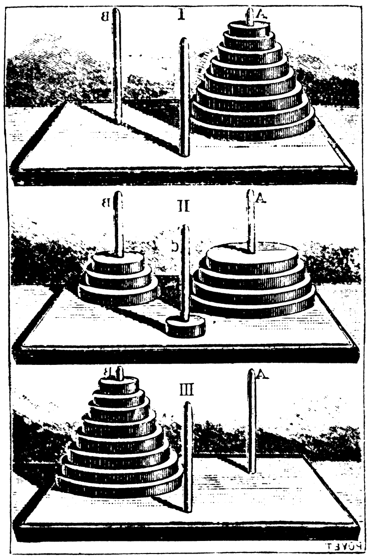
Nachází-li se např. na tyči a kotouče $1, 2$ (1 ležící na 2), na tyči b kotouč 4 a na tyči c kotouč, 3 tak jsou tři možné legální tahy:

(I) kotouč 1 z a na b (bude ležet na 4)

(II) kotouč 1 z a na c (bude ležet na 3)

(III) kotouč 3 z c na b (bude ležet na 4).

Jiné tahy zřejmě nejsou přípustné; kotouč 3 nesmí být přenesen na tyč a a kotouč 4 ani na a ani na c. Snadno si domyslíme, že v každé situaci, která je výsledkem řady legálních tahů, jsou kotouče na každé tyči uspořádané podle velikosti. Při každém tahu se pokládá jeden kotouč pouze na větší



Obrázek 1: Hanojské věže podle Lucase

kotouč nebo na desku a tedy zůstává tato vlastnost zachována. Rozdělení kotoučů na jednotlivých tyčích pojmenujeme „polohy“. Jedním legálním tahem přechází jedna poloha do jiné tím, že kotouč, který leží na větším kotouči (nebo na desce), je přenesen na větší (nebo na desku). Z toho vyplývá, že i vrácení legálního tahu je legálním tahem. Kolik tahů je možných v jedné poloze? Jestliže jsou všechny kotouče na jedné tyči, tak jsou možné dva tahy: Kotouč 1 (ve vrchní pozici) smí být přemístěn na jednu ze dvou zbývajících tyčí. V každém jiném případě existují tři legální tahy: kromě kotouče 1 (kde existují dvě možnosti) smí být druhý nejmenší kotouč ve vrchvní pozici přenesen na jinou tyč (kde se nenachází kotouč 1).

Kolik poloh existuje celkem v případě 4 kotoučů? Abychom určili tento počet, představme si, že se poloha vyrobí následovně (toto nejsou legální tahy!):

Počínaje největším kotoučem se pokládají 4 kotouče na (zatím neobsazené) tyče; pokaždé máme tři možnosti volby, celkem tedy $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ možností. Protože tímto způsobem se zřejmě každé postavení vyrobí přesně jednou, je to u 4 kotoučů 81 možných poloh (a při n kotoučích jim odpovídající 3^n).

Představme si všechny možné polohy jako množinu 81 bodů a spojme dva body hranou, když když poloha přiřazená jednomu bodu vyplývá z polohy přiřazené druhému legálním tahem. Dostaneme graf — říkejme mu G_4. Jak vypadá?

Je přirozené se nejprve ptát na graf G_1 (graf poloh jednoho kotouče) a G_2 (graf poloh dvou kotoučů). Protože máme tři tyče, tak jednomu kotouči odpovídají tři polohy a každá přechází jedním legálním tahem do každé jiné: G_1 je trojúhelník.

Abychom obdrželi graf G_2, rozložíme množinu S_2 všech devíti poloh dvou kotoučů na tři množiny S_2^a, S_2^b, S_2^c podle polohy největšího kotouče. S_2^b odpovídá tedy množině poloh, u kterých větší kotouč je na tyči b. Všechny tři polohy S_2^a jsou spojeny hranou — můžeme si představovat, že větší kotouč splyne s deskou a nalézáme se tak v případě G_1. Podobné platí o S_2^a, S_2^c. Můžeme si tedy představovat, že graf G_2 je sestavený ze tří trojúhelníků, podle polohy většího kotouče.

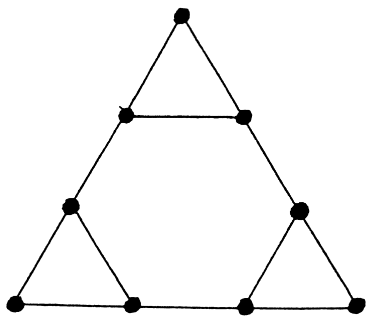
A jak je to s hranami, které vycházejí z poloh v množině S_2^a směrem ven, tedy na polohy v množinách S_2^b, S_2^c?

Pro polohu, při které se oba kotouče nachází na tyči a neexistuje spojení směrem ven: kotoučem 2 nelze hýbat. Leží-li však kotouč 1 na tyči b a kotouč 2 na tyči a, potom kotouč 2 může být přenesen na tyč c. Tato poloha v S_2^a je spojena s polohou v S_2^c. Tomu zcela odpovídá, že třetí poloha v S_2^a je spojena s polohou v S_2^b. Tím je jednoznačně určen graf G_2: skládá se ze tří trojúhelníků G_2^a, G_2^b, G_2^c, které jsou kolem dokola spojeny hranou (to je znázorněno na obr. 2). Zcela analogickým způsobem může být graf G_3 vytvořen na základě G_2, G_4 na základě G_3; je nutno pouze dbát, aby na místo trojúhelníků G_2^a nad S_2^a atd. se dostaly grafy předešlého typu.

Popíšeme ještě přechod z G_3 na G_4. Nechť je G_4^a ten graf, který odpovídá 4 kotoučům a u kterého se kotouč 4 nalézá na tyči a. Kotouč 4 pak pro legalitu tahů nehraje žádnou roli, tzn. G_4^a je isomorfní G_3 (tentýž graf, pouze nad jinou množinou).

Obdobné platí pro G_4^b, G_4^c. G_4 je tedy postaven ze tří kopií G_3. Otázkou zůstává, které hrany povedou ven z G_4^a.

V grafu G_3 (a obdobně v grafu G_4^a) jsou 3 body, které jsou spojeny hranou pouze s dvěma dalšími. Tyto body odpovídají polohám, kde se všechny tři menší kotouče nalézají na téže tyči. Nachází-li se i ten největší kotouč 4 na této tyči, neexistuje žádná hrana ven. Jsou-li však všechny menší kotouče na b a největší na a, pak jej lze přesunout na c. Existuje tedy přesně jedna



Obrázek 2: Graf přiřazený věžím s dvěma disky

hrana z G_4^a do G_4^c. Tím je určen G_4. Nyní popíšeme tento přechod ještě trochu abstraktněji (a tím jednodušeji). H budiž graf s tou vlastností, že všechny body budou, až na tři, spojeny hranou s přesně třemi jinými body. Ty tři vyjímečné nechť jsou p, q, r a jsou spojeny hranou s přesně dvěma jinými.

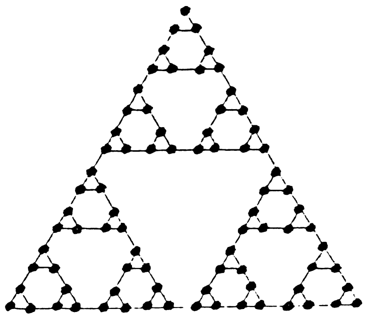
Nyní vytvoříme z H tři isomorfní kopie H^a, H^b, H^c. Nový graf G se bude skládat z grafů H^a, H^b, H^c, ve kterém jsou zaneseny ještě tři nové hrany. V tomto spojení zjevně existuje nejprve devět vyjímečných bodů: p je nahrazen body p^a, p^b, p^c, q je nahrazen body q^a, q^b, q^c a bod r je nahrazen body r^a, r^b, r^c.

Tři nové hrany spojují vždy

$$
\begin{gathered}
p^b \text{ s } p^c \\
q^a \text{ s } q^c \\
r^a \text{ s } r^b
\end{gathered}
$$

Tím také vycházejí z p^b, p^c, q^a, q^c, r^a a r^b tři hrany a nové vyjímečné body jsou p^a, q^b, r^c. Na základě této konstrukce je velmi jednoduché sestrojit graf kopírovacím přístrojem (duplikací). To popíšeme nyní.

Mějme znázornění H a nechť vyjímečné body jsou rohy rovnoramenného trojúhelníka tak, že se graf nachází uvnitř tohoto trojúhelníka. Pak se vyrobí 3 kopie H a tyto tři kopie se podle obr. 1 nalepí na papír a vyznačí se tři nové hrany. I ten nový graf leží pak na rovnoramenném trojúhelníku a postup může být iterován. Obr. 3 ukazuje takto vyrobený graf G_4 shodný s případem 4 kotoučů.



Obrázek 3: Graf přiřazený věžím s čtyřmi disky

Takto popsaná konstrukce zjevně převádí souvislý graf na jiný souvislý graf: vždy dvě polohy hanojských věží mohou tedy být řadou legálních tahů převedeny do sebe, zejména tedy jedna pyramida z jedné tyče na jinou tyč. Stejně tak je možno snadno zodpovědět mnoho jiných otázek, např. otázku na počet nutných tahů, na jednoznačnost cesty při minimálním počtu tahů apod.

Hanojské věže v Herbrandově Universu

Pro definici věží pomocí logického programování používáme pojem „seznamu". Všechny tyto seznamy budou sestaveny z konstant a, b, c, s. Že je označujeme jako konstanty znamená, že je nutno je chápat jako vlastní jména, ovšem ne jako jména osob reálního světa, spíše jako jména ze světa pohádek - Rumplcimprcampr existuje v té své pohádce a nikde jinde.

Dáme několik příkladů seznamů: $[a, b, c, a, s]$. Tento seznam se skládá z pěti prvků; prvek a je hlava seznamu a seznam $[b, c, a, s]$ je bytek. Abychom naznačili že $[a, b, c, a, s]$ se skládá z hlavy a těla říkáme také, že

$$[a, b, c, a, s] \text{ je } [a|[b, c, a, s]].$$

Seznamy podle toho mohou tedy být považovány za termy, tvořené dvoumístným funkčním znakem

$$[X|Y],$$

kde jako argument na druhém místě je připuštěn jen jeden seznam.

Abychom tímto postupem dostali všechny seznamy, potřebujeme jako výchozí seznam prázdný seznam [ ].

Seznam a je potom seznam

$$[a|[\ ]].$$

Seznam $[[a,b]|[a,a,b]]$ se skládá ze čtyř prvků, kde první je sám seznamem. Je tedy seznam

$$[[a,b],a,a,b].$$

Jako universum — takzvané Herbrandovo universum — v kterém definujeme naše struktury volíme konstanty a,b,c,s a všechny seznamy, které — v iterovaných použitích konstrukce seznamů — z nich mohou být vytvořeny. Pro náš účel řešení problému Hanojských věží můžeme ovšem používat pouze seznamy seznamů ze seznamů.

Trojuhelník nad a,b,c si můžeme představovat jako následující seznam seznamů:

$$[[a,b],[b,c],[c,a]].$$

Seznam $[a,b]$ reprezentuje hranu od a do b. U seznamů vlastně záleží na pořadí; tak $[a,b]$ není tentýž seznam jako $[b,a]$. Přesto se můžeme dohodnout, že výskyt $[a,b]$ má udávat hranu od a do b. Vždyť pořadí hran v seznamu je také lhostejné. Proto:

$$[[c,a],[b,c],[b,a]].$$

znázorňuje také trojúhelník nad a,b,c.

Podstatným krokem při konstrukci grafů pro problém Hanojských věží s větším počtem kotoučů je přechod od jednoho grafu ke třem isomorfním kopiím.

Takový přechod lze nejsnadněji realizovat, jestliže body grafu už samy jsou seznamy.

Je-li totiž $[s]$ takovým bodem, můžeme $[s]$ ztrojnásobit tím, že před něj posadíme a,b,c. A přejdeme k $[a,s],[b,s],[c,s]$. Z toho důvodu chceme graf odpovídající jednomu kotouči znázornit jako trojúhelník nad $[a],[b],[c]$. Tento graf je tedy

$$[[[a],[b]],[[b],[c]],[[c],[a]]]$$

To vyjádříme „axiomem“

$$hanoi([s],[[[a],[b]],[[b],[c]],[[c],[a]]]). \qquad (1)$$

Tímto axiomem je určen vztah mezi $[s]$ — kotoučem — a příslušným grafem. Ztrojnásobením grafu

$$[[[a],[b]],[[b],[c]],[[c],[a]]]$$

pomocí a, b, c, můžeme nejprve naznačit pro jednu proměnou X (za kterou později musíme dosadit a, b, c).

Isomorfní X-obraz budeme definovat předpisem

$$[[[X,a],[X,b]],[[X,b][X,c]],[[X,c],[X,a]]].$$

(Obvykle používáme následující konvenci: velká písmena pro proměnné s možnými hodnotami v Herbrandově universu, malá písmena pro konstanty.)

Pro definici této konstrukce v obecném případě se podívejme nejprve na X-označení seznamu seznamů:

Seznam seznamů L je X-označen, jestliže u každého seznamu z L je na prvním místě prvek X.

s-označení

$$[[a,b],[c,b,a],[b],[\ ]]$$

je tedy $[[s,a,b],[s,c,b,a],[s,b],[s]]$.

Zavedeme proto třímístný predikát *označený*(, ,): *označený*(X, L, M) má platit, jestliže M je X-označený seznam L.

Zřejmě tedy X-označený prázdný seznam je prázdný seznam tedy symbolicky

$$\mathit{označený}(X,[\ ],[\ ]). \tag{2}$$

Pro pohodlí čtenáře můžeme dále definovat:

$$\mathit{označený}(X,[Y_1,\ldots,Y_m],[[X|Y_1],\ldots,[X|Y_m]]).$$

Pro automatické zpracování to sotva postačuje. Určíme proto, jak lze označování seznamů odvodit od označení kratšího seznamu. Seznam pro označení budiž $[Y|L]$, tedy nejprve seznam Y následovaný seznamem seznamů L.

X-označený seznam bude začínat $[X|Y]$, a bude následovat seznam M. Co je M? M je zřejmě X-označený seznam L. Zaznamenáme to takto

$$\mathit{označený}(X,[Y|L],[[X|Y]|M]) \quad :- \quad \mathit{označený}(X,L,M). \tag{3}$$

Řádky (2) a (3) tvoří prologový program, s jehož pomocí se označují seznamy. Znak „:−“ zastupuje „když“; v matematické logice je obvyklé, vyjádřit jej pomocí implikace:

$$\mathit{označený}(X,L,M) \to \mathit{označený}(X,[Y|L],[[X|Y]|M])$$

Proměnné „probíhají“ přitom přes všechny termy Herbrandova universa. Jak se takový program, obsahující řádky (2) a (3) bude používat?

Programu můžeme klást otázky např. následujícího tvaru:

$$?- \quad \mathit{označený}(a, [[b], [c, a]], U).$$

Tento program se interpretuje jako výzva, najít term U(tzn. seznam), pro který vyplývá platnost (3) ze (2).

Otázka, kterou lze zodpovědět nejsnadněji je

$$?- \quad \mathit{označený}(a, [\ ], U).$$

Z (2) vyplývá bezprostředně odpověď

$$U = [\ ].$$

A jak je to s těžšími otázkami? Podíváme se detailněji na následující případ:

$$?- \quad \mathit{označený}(a, [[b], [c, a]], U). \tag{4}$$

Možná, že tento výklad není příliš pochopitelný. Některý čtenář se snad utěší tím, že ukážeme jak nalézt správnou odpověď:

$$U = [[a, b], [a, c, a]]$$

Jak tuto odpověď dostaneme z (2), (3)? Zřejmě (2) na začátku vůbec nepomůže. Položíme-li však

$$\mathit{označený}(a, [[b], [c, a]], U)$$

na levou stranu ve výrazu (3), tak jsme udělali první správný krok. Budiž tedy:

$\mathit{označený}(a, [[b], [c, a]], U)$ identické s $\mathit{označený}(X, [Y|L], [[X|Y]|M])$.

potom musí platit

$$\begin{gathered} X \text{ identické } a; \\ [Y|L] \text{ identické } [[b], [c, a]] \\ [[X|Y]|M] \text{ identické s } U. \end{gathered}$$

Identita $[Y|L]$ s $[[b], [[c, a]]$ znamená

$$Y \text{ identické s } [b]$$
$$L \text{ identické } [[c,a]].$$

Abychom se dostali dále, musíme uvážit rovněž pravou stranu (3), tzn.

$$\mathit{označený}(X, L, M).$$

Na základě shora uvedené identity

$$\mathit{označený}(a, [[c,a]], M).$$

Položíme tedy programu otázku (přesněji: program si má sám položit otázku!)

$$? - \mathit{označený}(a, [[c,a]], M).$$

K zodpovězení této otázky budeme postupovat přesně stejným způsobem; (2) nepomůže, a uvážíme proto identifikaci s levou stranou (3).

Přitom musíme zabránit kolizi proměnných. Při každém použití (3) musíme proměnné nově označit.

$$\mathit{označený}(X_1, [Y_1|L_1], [[X_1|Y_1]|M_1]) \quad :- \quad \mathit{označený}(X_1, L_1, M_1)$$

Identifikací levé strany s $\mathit{označený}(a, [[c,a]], M)$ obdržíme

$$X_1 \text{ identické s } a;$$
$$[Y_1|L_1] \text{ identické } [[c,a]]$$
$$[[X_1|Y_1]|M_1] \text{ identické s } M.$$

Dále potřebujeme $\mathit{označený}(X_1, L_1, M_1)$. Z identifikací vyplývá :

Y_1 je identické $[c,a]$, L_1 je prázdný seznam,
tedy $\mathit{označený}(X_1, L_1, M_1)$ je $\mathit{označený}(a, [\ ], M_1)$.

Na otázku

$$? - \mathit{označený}(a, [\ ], M_1)$$

dostaneme z (2) bezprostředně odpověď

$$M_1 = [\ ].$$

$[[X_1|Y_1]|M_1]$ je tedy $[[a|[c,a]]|[\ ]]$ což není nic jiného než $[[a,c,a]]$.

Tím jsme našli

$$\mathit{označený}(a, [[c,a]], [[a,c,a]]),$$

a můžeme se vrátit další krok zpět a konečně najdeme odpověď

$$U = [[a, b], [a, c, a]].$$

Řešení tak nacházíme zpětným postupem. Axiom (3) je toho druhu, že z něj lze vyčíst, na základě jaké znalosti je možná odpověď. Tato znalost se formuluje jako nová otázka a postup se iteruje.

Samozřejmě nelze všechny problémy řešit podle tak jednoduchého schematu. Je však překvapující jak rozmanité jsou možnosti aplikace tohoto schematu.

Toto schema je ostatně schopné zevšeobecnění; funguje i v takovém případě jako

$$A \quad :- \quad K_1, K_2$$

Pro odpověď A potřebujeme K_1 a K_2.

Naše další definice je tohoto druhu:

Na základě predikátu mark je nyní snadné, definovat isomorfní kopie grafů.

Grafy jsou seznamy seznamů seznamů; transformují se do isomorfních kopií tím že před nejvnitřnější seznamy se posadí nová hlava; a to má stejný význam jako označení druhých nejvnitřnějších seznamů.

$$\textit{isomorfní}(X, L, M) \text{ znamená :}$$

Označením prvků L vzniká z L seznam M. Tímto způsobem

$$\textit{isomorfní}(X, [\,], [\,]). \tag{5}$$

$$\textit{isomorfní}(X, [Y|L], [Z|M]) \quad :- \quad \textit{označený}(X, Y, Z), \textit{isomorfní}(X, L, M) \tag{6}$$

Čárka mezi *označený*(X, Y, Z) a *isomorfní*(X, L, M) znamená konjunkci.

X-obraz z $[Y|L]$ se obdrží tím, že první seznam Y je X-označen (tím je dáno Z) a zbytek se transformuje do X-obrazu.

Pomocí „*isomorfní*" mohou být z jednoho grafu H definovány tři isomorfní kopie:

$$\textit{isomorfní}(a, H, H_a)$$
$$\textit{isomorfní}(b, H, H_b) \text{ a } \textit{isomorfní}(c, H, H_c).$$

(Spojení jako H_a platí jako proměnná; notace slouží pouze lepší čitelnosti.)

Nyní popíšeme slepení tří kopií do jednoho seznamu v Herbrandově universu. Tato operace odpovídá zřetězení tří seznamů do jednoho seznamu. Napřed definujme zřetězení dvou seznamů:

$$\textit{zřetězení}(L, M, A)$$

bude platit, když A je seznam, ve kterém jsou uvedeny napřed prvky L, pak prvky M.

$$\textit{zřetězení}([\,], L, L). \tag{7}$$

(Je-li první seznam prázdný, je výsledkem druhý.)

$$\textit{zřetězení}([X|L], M, [X|N]) \quad :- \quad \textit{zřetězení}(L, M, N). \tag{8}$$

(Když $[X|L]$ je zřetězeno s M, tak je X prvním článkem nového sledu; zbytek je zřetězení L a M.)

Pro pozdější účely definujme zřetězení čtyř seznamů A, B, C, D do jednoho seznamu L. K tomu se zřetězí A, B do H a C, D do I; L je pak zřetězení H a I. Tedy

$$\begin{aligned}\textit{zřetězení}(A, B, C, D, L) \quad :- \quad & \textit{zřetězení}(A, B, H),\\ & \textit{zřetězení}(C, D, I),\\ & \textit{zřetězení}(H, I, L).\end{aligned} \tag{9}$$

Musíme ještě definovat tři hrany, které spojují kopie. Předpokládejme, že máme případ, při kterém se z grafu se třemi kotouči konstruuje graf se čtyřmi. Dále nechť jsou ty tři body v H, které patří jen ke dvěma hranám trojice označeny jako ($[a, a, a]$, $[b, b, b]$, $[c, c, c]$.

Značením se z toho stává:

$$\begin{array}{c}[a, a, a.a], [a, b.b, b], [a, c, c, c] \text{ (v } H_a),\\ [b, a, a, a], [b, b, b, b], [b, c, c, c] \text{ (v } H_b),\\ [c, a, a, a], [c, b, b, b], [c, c, c, c] \text{ (v } H_c).\end{array}$$

Nyní definujeme

hrany spojující $[b, a, a, a]$ s $[c, a, a, a]$,
hrany spojující $[a, b, b, b]$ s $[c, b, b, b]$,
hrany spojující $[a, c, c, c]$ s $[b, c, c, c]$.

Z oněch 9 horních bodů pouze $[a,a,a,a]$, $[b,b,b,b]$ a $[c,c,c,c]$ nejsou součástí nových hran. I u toho nového grafu patří přesně tyto body ke dvěma hranám, které odpovídají seznamům s pouze jedním prvkem.

Počet kotoučů v Herbrandově universu znázorníme jedním seznamem. $[s,s,s]$ má tedy znamenat 3 kotouče, $[s,s,s,s]$ čtyři.

Pak definujeme predikát $\mathit{konstanta}(Z,L,M)$, který nám dovolí přejít od $[s,s,s]$ k $[a,a,a]$ atd.,

$$\mathit{konstanta}(X,[\,],[\,]). \tag{10}$$

$$\mathit{konstanta}(X,[Y|L],[X|M]) \quad :- \quad \mathit{konstanta}(X,L,N). \tag{11}$$

($\mathit{konstanta}(X,L,M)$ platí, když seznamy L, M jsou stejně dlouhé a M se skládá pouze z prvku X).

Tím nyní můžeme definovat seznamy 3 nových hran, které nutno nově zavést při přechodu z grafu, který patří k s-seznamu S:

$$\begin{aligned} \mathit{nov\acute{y}}(S,K) \quad :- \quad & \mathit{konstanta}(a,S,A), \\ & \mathit{konstanta}(b,S,B), \\ & \mathit{konstanta}(c,S,C), \\ & K = [[[b|A],[c|A]],[[a|B],[c|B]],[[a|C],[b|C]]]. \end{aligned} \tag{12}$$

Když S je seznam $[s,s,s]$, tak A je seznam $[a,a,a]$ a vystupuje jako nová hrana $[[b,a,a,a],[c,a,a,a]]$, což je totéž jako $[[b|A],[c|A]]$.

Tím můžeme obecně definovat grafy Hanojských věží v úplné obecnosti:

$$\begin{aligned} \mathit{hanoi}([s|S],G) \quad :- \quad & \mathit{hanoi}(S,H), \\ & \mathit{isomorfn\acute{\imath}}(a,H,H_a), \\ & \mathit{isomorfn\acute{\imath}}(b,H,H_b), \\ & \mathit{isomorfn\acute{\imath}}(c,H,H_c), \\ & \mathit{nov\acute{y}}(S,K), \\ & \mathit{z\check{r}et\check{e}zen\acute{\imath}}(H_a,H_b,H_c,K,G). \end{aligned} \tag{13}$$

Tento program můžeme také číst takto: G je graf pro $[s|S]$ platí-li následující: H je graf pro S. H_a, H_b, H_c jsou tři isomorfní kopie; K je seznam tří nových hran; G je zřetězení H_a, H_b, H_c, K.

Otázka

$$?-\ \mathit{hanoi}([s,s,s,s],U)$$

je zodpovězena seznamem U 120 hran grafu G.

Literatura

ARNAULD A., NICOLE P. (1622/1981) La logique ou l´art de penser, ed. crit.

LLOYD J. W. (1987), Foundations of Logic Programming, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.

LUCAS E. (1883) Récreations mathématiques, vol. 3, Gauthier-Villars, Paris.

STERLING L., SHAPIRO E. (1986), The Art of Prolog, MIT Press, Cambridge Mass.

Prof. Dr. ERNST SPECKER, Steinbrüchelstrasse 46, 8053 Zürich.

Přednáška prof. E. Speckera je pořádána ve spolupráci KAM (Katedra aplikované matematiky) MFF UK a ITI (Institut teoretické informatiky) a tvoří v pořadí již 44. Matematické kolokvium. Snad je vhodné při této příležitosti stručně nastínit poslání a historii těchto přednášek.

První kolokvium se konalo v roce 1987. Základní myšlenkou byla snaha po uskutečnění serie „velkých přednášek“, které by byly určeny co nejširší matematické obci. Při frekvenci zhruba jedné až dvou přednášek za semestr byla přednesena tato kolokvia:

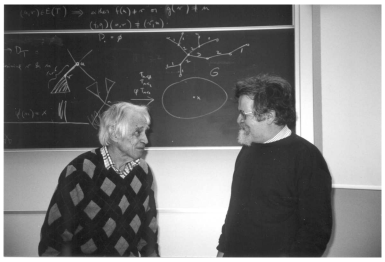
1. L. Lovász
2. P. Erdős
3. R. Tijdeman
4. A. Ambrosetti
5. F. Hirzebruch
6. H. Bauer
7. V. Chvátal
8. B. Korte
9. J. Seidel
10. V. G. Kac
11. G. Choquet
12. D. J. A. Welsh
13. J. G. Thompson
14. H. Fürstenberg
15. S. Cook
16. K. Mehlhorn
17. S. Todorčevič
18. J. J. Kohn
19. C. Thomassen
20. A. Borel
21. N. Alon
22. V. Klee
23. J. Spencer
24. J. Lindenstrauss
25. A. Schinzel
26. P. L. Cameron
27. M. Laczkovich
28. B. Mandelbrot
29. D. Preiss
30. J. Nekovář
31. V. Strassen
32. J. Chayes
33. B. Banaschewski
34. L. H. Kauffman
35. G. Pisier
36. A. Pelczynski
37. C. Berge
38. V. T. Sós
39. M. Grötschel
40. R. E. Burkard
41. H. S. Wilf
42. M. Waterman
43. M. Sharir

Témata přednášek zahrnovala většinu matematických oborů od matematické analýzy a aplikované matematiky přes algebru, až po teoretickou informatiku a diskrétní matematiku. Podle mínění mnoha zúčastněných měly některé přednášky mimořádnou úroveň.

KAM a ITI jsou otevřeny individuálním návrhům na kandidáty pro budoucí kolokvia. Jak vidno z dosavadní historie, základním kritériem je úroveň přednášejícího.

Jaroslav Nešetřil

Pozvánky jsou zasílány elektronicky (tištěné pouze institucím). Sdělte prosím svou e-mailovou adresu na `klazar@kam.ms.mff.cuni.cz`



(foto: M. Cochand)