KALEIDOSKOP TEORIE ČÍSEL

(4. kapitola)

Martin Klazar

Vím, že čísla jsou krásná. A jestliže krásná nejsou, pak není krásné nic.

(Paul Erdős, *Sunday Times Magazine,* 27. listopadu 1988.)

Analogicky prožíval pan Š. číslice.
„Pro mne 2, 4, 6, 5 nejsou pouhá čísla. Mají tvar ...
1 — to je ostré číslo, nezávisle na jeho grafickém vyjádření,
je to něco ukončeného, tvrdého.
2 — to je plošší, čtverhranné, bělavé, bývá trochu našedlé ...
3 — to je zaostřený úlomek a točí se.
4 — to je opět čtvercové, tupé, podobné 2, ale mohutnější, tlusté ...
5 — plné zakončení v podobě kužele, věže, masívní.
6 — to následuje první za „5“, je bělavé.
8 — to je nevinné, modravě mléčné, podobné vápnu.“

(A. R. Lurija, *Malá knížka o velké paměti.*)

Toto je předběžný text 4. kapitoly (kongruence) skript k mé přednášce *Úvod do teorie čísel*, kterou jsem konal na MFF UK v Praze v zimních semestrech školních roků 1996/97, 1998/99 a 1999/00. Zatím v preprintové řadě KAM-DIMATIA Series vyšly kapitoly 1 (základní pojmy a obraty), 2 (diofantické aproximace) a 3 (diofantické rovnice) a budou v ní postupně vydány zbylé kapitoly 5 (prvočísla), 6 (geometrie čísel), 7 (číselné rozklady), 8 (medailony matematiků) a 9 (návody k řešením úloh). Obtížnost úloh je bodována 0 (nejlehčí) až 5 (nejtěžší).

červenec 2000 Martin Klazar

Obsah

Kapitola 4

Zbytky čísel

Zákon reciprocity kvadratických zbytků, věta 106, patří mezi nejkrásnější výsledky elementární teorie čísel. Poprvé ho formuloval v jazyku kvadratických forem už Leonard Euler ve spisu *Theoremata circa divisores numerorum in hac forma* $pa^2 \pm qb^2$ *contentorum* (1744/46). (Na to upozornil Leopold Kronecker v roce 1875.) Explicitně ho ve tvaru blízkém dnešnímu Euler uveřejnil znovu v *Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos* (publikováno v *Opuscula Analytica* posmrtně v r. 1783). Termín „reciprocita" v názvu zákona razil Adrien-Marie Legendre, který se jím zabýval v pracích *Recherches d'Analyse Indéterminée* (1785/88) a *Essai sur la Théorie des Nombres* (1798). *Essai* ... je vůbec první kniha věnovaná výhradně teorii čísel.

Legendre byl první, kdo podal alespoň částečný důkaz zákona reciprocity. Z osmi případů odpovídajících možnostem $p, q \equiv \pm 1 \bmod 4$ a $(\frac{p}{q}) = \pm 1$ uměl dokázat v úplnosti dva: $p \equiv -q \equiv 1 \bmod 4$ & $(\frac{p}{q}) = -1$ a $p \equiv q \equiv -1 \bmod 4$ & $(\frac{p}{q}) = 1$. V důkazu zbylých šesti případů se odvolával na tvrzení, jehož důkaz tehdy nebyl znám a které dokázal Peter Dirichlet až v r. 1837, že v jisté zbytkové třídě leží vždy alespoň jedno prvočíslo.

V polovině devadesátých let vstoupil na scénu německý mladík, který byl synem nádeníka v Braunschweigu a jehož zázračný talent zachránilo mecenášství brunšvicko-wolfenbüttelského vévody. Carl Friedrich Gauss (nebo Gauß podle staršího pravopisu) experimentoval s kvadratickými zbytky už od roku 1792. Na začátku roku 1795 znovuobjevil nejprve 1. doplněk zákona reciprocity, relaci $(\frac{-1}{p}) = (-1)^{(p-1)/2}$, a v březnu téhož roku zákon sám. 8. dubna 1796, podle záznamu v deníku, Gauss nalezl jeho důkaz. Důkaz rozlišuje osm Legendreových případů, je založen na indukci a je zcela elementární, ale složitý. Gaussovi bylo bez několika dní 19 let. Svým objevem se po zásluze pyšnil a zákon reciprocity nazýval *Theorema Fundamentale* či dokonce *Theorema Aureum* (zlatá věta). 22. června 1796 našel druhý důkaz, založený na rodu kvadratických forem, a na podzim 1796 další dva důkazy. Monografie *Disquisitiones Arithmeticae*, jejíž vydání čtyřiadvacetiletým Gaussem v roce 1801 se považuje za počátek letopočtu moderní teorie čísel, obsahuje první dva důkazy. Gauss jich v průběhu života publikoval celkem šest a další dva byly nalezeny v jeho pozůstalosti.

My se v oddílu 4.3 spokojíme se dvěma. První, asi nejelementárnější ze známých důkazů, je založen na identitě mezi počty mřížových bodů v jistých rovinných útvarech. Druhý užívá vlastností exponenciální funkce a náleží Gaussovu žáku Ferdinandu Eisensteinovi.

Nicméně naším hlavním tématem v kapitole 4 nebudou kvadratické zbytky, ale konečná pole. V 4.1 odvodíme jejich základní vlastnosti (shrnujeme je v tvrzení 92). Existence konečného pole vyplyne z enumerace polynomů: V Gaussově větě 89 dokážeme, že v $\mathbf{Z}_p[x]$ je $\frac{1}{n}\sum_{d\backslash n} p^d\mu(n/d)$ monických ireducibilních polynomů stupně n. V důkazu Erdősovy a Chowlovy věty 94 uvidíme, jak lze pomocí konečných polí sestrojit velké podmnožiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, v nichž se žádná vzdálenost dvou prvků neopakuje. V 4.2 dokážeme Chevalley–Warningovu větu 95 o počtech řešení polynomiální soustavy nad konečným polem $\mathrm{GF}(p^r)$ — přesahuje-li počet neznámých součet stupňů, je počet řešení dělitelný p — a uvedeme její dvě kombinatorická použití. V 4.3 kromě dvou zmíněných důkazů zákona reciprocity popíšeme teorii kvadratických zbytků, hlavně vlastnosti Legendreova symbolu.

Oddíl 4.4 věnujeme elementárnímu důkazu speciálního případu Weilovy věty 111, která patří k hlavním výsledkům teorie čísel ve 20. století. Věta říká, že pro konečné pole F a ireducibilní polynom $P \in F[X, Y]$, který zůstává ireducibilní i v $\overline{F}[X, Y]$ ($\overline{F}$ označuje algebraický uzávěr F), má rovnice $P(x, y) = 0_F$ právě $|F| + O(|F|^{1/2})$ řešení $x, y \in F$. Jde o výsledek mnohem hlubší než Chevalley–Warningova věta, s obtížným důkazem. Spokojíme se s důkazem případu $F = \mathbf{Z}_p$. V pododdílu 4.4.1 dokážeme, že pro každé k existuje „turnaj“ mezi několika hráči, v němž je každých k hráčů poraženo nějakým jiným hráčem. Velmi jednoduchý důkaz užívající pravděpodobnostní metodu je nekonstruktivní. Jediný známý konstruktivní důkaz je založen na Weilově větě.[1]

[1] V lednu 2000 Tyszkiewicz publikoval nový, velmi jednoduchý konstruktivní důkaz. Viz poznámky.

V kapitole 4 u čtenáře předpokládáme zběhlost v zacházení se základními pojmy komutativní algebry, například v 4.4 pracujeme s pojmem algebraického uzávěru (o němž je ale třeba vědět vpodstatě jen to, že existuje). Většinu pojmů se snažíme připomenout. Důkaz případu $F = \mathbf{Z}_p$ Weilovy věty v 4.4.2–4.4.4 je asi nejsložitějším důkazem skript. Chce-li čtenářka získat povšechný přehled o Weilově větě a nezajímají-li ji technické jemnosti důkazu, může si přečíst jen úvod 4.4, 4.4.1 a poznámky k 4.4.

4.1 Konečná pole

Připomínáme, že *těleso* je algebraická struktura $(T, +, \cdot)$ s binárními operacemi „sčítání“ $+$ a „násobení“ $\cdot$, přičemž $(T, +)$ je komutativní grupa, $T^* = (T \backslash \{0_T\}, \cdot)$ je grupa a obě operace svazuje distributivní zákon. Je-li multiplikativní grupa nenulových prvků T^* komutativní, mluvíme o komutativním tělese neboli o *poli*. Příkladem nekomutativního tělesa jsou kvaterniony (úloha 3). Dá se dokázat, že všechna konečná tělesa jsou pole (úlohy 4 a 5). Příkladem konečného tělesa je pole zbytků $\mathbf{Z}_p = (\{0, 1, \ldots, p-1\}, +, \cdot)$, v němž se sčítá a násobí běžným způsobem modulo prvočíslo p. Nás budou zajímat pouze konečná tělesa a proto se v definicích omezíme na pole.

Nechť F je pole, G jeho podpole a $\alpha \in F$. Řekneme, že α má *stupeň* r *nad* G, pokud $r = \min\{\deg(a) :\ a \in G[x]\ \&\ a(\alpha) = 0_F\}$. Monický polynom $a \in G[x]$ realizující stupeň α je *minimální polynom* α *nad* G. Nechť F je pole a $n \in \mathbf{N}_0$. Jako n_F označíme prvek $1_F + 1_F + \cdots + 1_F$, který vznikne sečtením n jednotkových prvků (0_F je nulový prvek F). Pro $n \in \mathbf{Z}$ a $n < 0$ rozšíříme tuto definici pomocí $n_F = -(-n)_F$. Pokud $n_F \neq 0_F$ pro všechna čísla $n > 0$, říkáme, že F má *charakteristiku* 0. Pokud $n_F = 0_F$ pro některé $n \in \mathbf{N}$, je nejmenší takové n prvočíslo p, jak hned dokážeme. O takových polích řekneme, že mají *charakteristiku* p.

Lemma 84. *Nechť pole F nemá charakteristiku 0. Pak nejmenší číslo $n \in \mathbf{N}$, pro něž $n_F = 0_F$, je nějaké prvočíslo p. V takovém F pro každé $m, n \in \mathbf{Z}$ platí ekvivalence*

$$m_F = n_F \iff m \equiv n \bmod p\ .$$

Důkaz. Má-li n uvedenou vlastnost a $n = kl$, kde $k, l \in \mathbf{N}$,

$$0_F = n_F = (kl)_F = k_F l_F\ .$$

Protože pole nemá dělitele nuly (F^* je grupa), $k_F = 0_F$ nebo $l_F = 0_F$. Podle definice n nutně $k = n$ nebo $l = n$. Číslo n nemá netriviální dělitele a je prvočíslo, $n = p$.

Nechť prvočíslo p je charakteristikou F. Pokud $m - n = pk$, $(m-n)_F = p_F k_F = 0_F$ a $m_F = n_F$. Pokud $m_F = n_F$, vyjádříme $m - n$ jako $m - n = pk + l, 0 \leq l < p$ (tvrzení 1) a dostáváme, že $0_F = m_F - n_F = (m-n)_F = (pk+l)_F = p_F k_F + l_F = l_F$. Z definice p plyne, že $l = 0$. Tedy $p \backslash (m-n)$. $\diamondsuit$

Tvrzení 85 (F má p^r prvků). *Nechť F je konečné pole. Pak F má charakteristiku p a $|F| = p^r$ pro nějaké číslo $r \in \mathbf{N}$.*

DŮKAZ. Z konečnosti F plyne, že $m_F = n_F$ pro nějaká přirozená čísla $m < n$. Pak ale $n_F - m_F = (n-m)_F = 0_F$ a F má charakteristiku p. Množina $G = \{0_F, 1_F, \ldots, (p-1)_F\}$ tvoří podpole izomorfní poli $\mathbf{Z}_p$ (lemma 84). F je vektorovým prostorem s tělesem skalárů G. Má konečnou dimenzi r a jeho vektory odpovídají vzájemně jednoznačně r-ticím skalárů G. F má $|G|^r = p^r$ prvků. $\diamondsuit$

Mírně zneužijeme značení a pro konečné pole F charakteristiky p budeme kopii G pole $\mathbf{Z}_p$ v F značit prostě $\mathbf{Z}_p$.

Tvrzení 86 (struktura F^*). *Nechť F je konečné pole a $|F| = p^r = s$. F^* je cyklická grupa řádu $s-1$ a má $\varphi(s-1)$ generátorů. (φ je Eulerova funkce definovaná v oddílu 1.2.)*

DŮKAZ. Ukážeme obecněji, že v grupě F^* je pro každý dělitel d čísla $s-1$ přesně $\varphi(d)$ prvků řádu d. Množinu takových prvků označíme jako R_d. Zřejmě je R_d podmnožinou řešení $x \in F$ rovnice

$$x^d = 1_F \ .$$

Prvek $\alpha \in R_d$ buď libovolný. Má řád d a ne menší, pročež jsou mocniny $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^d$ vzájemně různé. Zřejmě to jsou řešení hořejší rovnice. Ta však má nejvýše d řešení (mez pro počet různých kořenů polynomu z $F[x]$), a tak to jsou všechna řešení. Takže $R_d \subset \{\alpha^i : \ i = 1, \ldots, d\}$. Řád d dostaneme, právě když $i \perp d$. Proto buď $|R_d| = 0$ (α neexistuje) nebo $|R_d| = \varphi(d)$. Zřejmě (řád každého prvku dělí $s-1$)

$$\sum_{d \backslash (s-1)} |R_d| = s - 1 \ .$$

Podle tvrzení 9 (kapitola 1) $|R_d| = \varphi(d)$ pro každé $d, d\backslash(s-1)$. $\diamondsuit$

Komutativita násobení v F hraje v důkazu podstatnou roli. (Nehraje však žádnou roli v důkazu tvrzení 85.) V nekomutativním tělese T může totiž rovnice $x^d = 1_T$ mít víc než d řešení. Například $x^4 = 1_T$ má v tělese kvaternionů (viz úloha 3) osm řešení: $\pm 1, \pm i, \pm j$ a $\pm k$. Generátoru F^* se říká *primitivní element* F.

Čtenářka jistě ví, že pro každé pole F v okruhu polynomů $F[x]$ platí obdoba algoritmu dělení se zbytkem (tvrzení 1). Díky tomu je $F[x]$ okruh s jednoznačným rozkladem na ireducibilní prvky: Každý polynom $a \in F[x]$ má, až na pořadí a skalární násobky prvky z F, jednoznačný rozklad $a = b_1 b_2 \dots b_k$, kde $b_i \in F[x]$ jsou ireducibilní v $F[x]$ (obdoba věty 2).

Tvrzení 87 ($|F|$ určuje F). *Každá dvě konečná pole s týmž počtem prvků jsou izomorfní.*

Důkaz. Nechť F je konečné pole s $s = p^r$ prvky a $\sigma \in F^*$ je primitivní element. Ukážeme, že $\{\sigma^0, \sigma^1, \dots, \sigma^{r-1}\}$ je báze F jako vektorového prostoru nad $\mathbf{Z}_p$. Nechť $i \leq r$ je nejmenší počet, pro nějž je množina vektorů $X = \{\sigma^0, \sigma^1, \dots, \sigma^{i-1}\}$ lineárně nezávislá (nad $\mathbf{Z}_p$), ale $X \cup \{\sigma^i\}$ je lineárně závislá. To znamená, že σ^i je $\mathbf{Z}_p$-lineární kombinace prvků X. Opakovaným užitím identity $\sigma^k = \sigma^i \sigma^{k-i}$ pro $k > i$ získáme toto vyjádření pro každou mocninu $\sigma^k, k \in \mathbf{N}_0$. Ale $F = \{0_F, \sigma^0, \sigma^1, \dots, \sigma^{s-2}\}$, a tak je X bazí. Nutně $i = r$. Tím jsme také dokázali, že σ má nad $\mathbf{Z}_p$ stupeň r.

Nechť $P(x) \in \mathbf{Z}_p[x], \deg(P) = r$, je minimální polynom σ nad $\mathbf{Z}_p$. P je ireducibilní v $\mathbf{Z}_p[x]$ a dělí polynom $x^{s-1} - 1_F \in \mathbf{Z}_p[x]$, protože ten se anuluje na σ. Nechť G je jiné konečné pole s $s = p^r$ prvky. P se v $G[x]$ úplně rozkládá, protože dělí polynom $x^{s-1} - 1_G$, který se v $G[x]$ úplně rozkládá (jeho kořeny jsou právě prvky G^*). Můžeme proto vzít prvek $\theta \in G^*$, který je kořenem P. P je minimální polynom θ nad $\mathbf{Z}_p$ (je ireducibilní) a θ má nad $\mathbf{Z}_p$ stupeň r. Proto je $X' = \{\theta^0, \theta^1, \dots, \theta^{r-1}\}$ lineárně nezávislá a je lineární bazí G.

Snadno se ověří, že zobrazení $f : F \to G$, které prvku $a_0 + a_1\sigma + \dots + a_{r-1}\sigma^{r-1}$ ($a_i \in \mathbf{Z}_p$) přiřadí prvek $a_0 + a_1\theta + \dots + a_{r-1}\theta^{r-1}$, je izomorfismus polí F a G. (Pro platnost identity $f(\alpha\beta) = f(\alpha)f(\alpha)$ potřebujeme, že σ a θ mají *týž* minimální polynom P nad $\mathbf{Z}_p$.) $\diamondsuit$

Pro úplný popis konečných polí už zbývá jen dokázat, že pro každé prvočíslo p a každé číslo $r \in \mathbf{N}$ existuje pole F s p^r prvky. Ke konstrukci F nám poslouží okruh polynomů $\mathbf{Z}_p[x]$.

Lemma 88. *Nechť $b \in \mathbf{Z}_p[x]$ má stupeň r a je ireducibilní v $\mathbf{Z}_p[x]$. Pak faktorokruh $\mathbf{Z}_p[x]/I$, kde $I = (b) = \{sb : \ s \in \mathbf{Z}_p[x]\}$ je ideál generovaný b, má p^r prvků a je pole.*

DŮKAZ. Prvky $\mathbf{Z}_p[x]/I$ jsou právě všechny množiny polynomů tvaru $a + I$, kde $a \in \mathbf{Z}_p[x]$ má stupeň $< r$. Proto má $\mathbf{Z}_p[x]/I$ přesně p^r prvků. Jediný z axiomů pole, jehož splnění v $\mathbf{Z}_p[x]/I$ není zřejmé, je existence multiplikativního inverzu. Dokážeme ji snadno. Polynom b je ireducibilní, a tak b může dělit součin ac, kde a i c mají stupeň $< r$, jen když b dělí a nebo c. Pro každý nenulový $a \in \mathbf{Z}_p[x]$ se stupněm $< r$ tedy třídy $ac + I$, kde c probíhá p^r polynomů stupně $< r$, probíhají všech p^r prvků $\mathbf{Z}_p[x]/I$. Pro vhodný c máme $1 + I = ac + I = (a + I)(c + I)$ a $c + I$ je inverz k $a + I$. $\diamondsuit$

Vzhledem k tomuto lemmatu stačí dokázat, že v $\mathbf{Z}_p[x]$ je pro každé $n \in \mathbf{N}$ ireducibilní polynom stupně n. Kombinatorickou úvahou nalezneme přesný počet takových polynomů.

Věta 89 (Gauss, 1801). *Počet monických ireducibilních polynomů v $\mathbf{Z}_p[x]$ se stupněm n je roven*

$$\frac{1}{n} \sum_{d \backslash n} p^d \mu(n/d) \ ,$$

kde $\mu(n)$ je Möbiova funkce (definovaná v 1.2).

DŮKAZ. Hledaný počet označíme jako a_n. Tvrdíme, že platí identita

$$\frac{1}{1 - px} = \prod_{d=1}^{\infty} (1 - x^d)^{-a_d} \ .$$

Abychom ji nahlédli, porovnáme koeficienty u x^n. Vlevo se rovná p^n, což je zřejmě počet všech monických polynomů stupně n v $\mathbf{Z}_p[x]$. Vpravo (použijeme rozvoj $1/(1 - x^d) = 1 + x^d + x^{2d} + \cdots$) je roven počtu řešení rovnice

$$n = x_1 + x_2 + \cdots \ , \text{kde} \ \ x_i \in \{1_1, 1_2, \ldots, 1_{a_1}, 2_1, 2_2, \ldots 2_{a_2}, 3_1, \ldots\} = \mathbf{N}' \ ,$$

$x_1 \geq x_2 \geq \ldots$ a $\mathbf{N}'$ je modifikovaná množina $\mathbf{N}$, v níž máme a_1 druhů čísla 1, a_2 druhů čísla 2 a tak dále (pro $i_j, k_l \in \mathbf{N}'$ klademe $i_j > k_l$, pokud $i > k$ nebo $i = k$ & $j > l$). Což je vlastně počet všech možných faktorizací

$$a = b_1 b_2 \ldots \ ,$$

kde $a \in \mathbf{Z}_p[x]$ je monický stupně n a $b_i \in \mathbf{Z}_p[x]$ jsou monické a ireducibilní a ne nutně různé. (Máme právě a_k polynomů $b_i, \deg(b_i) = k$.) Koeficient u x^n vpravo tedy opět představuje počet všech monických polynomů stupně n, nyní jsou reprezentovány svými rozklady na součiny ireducibilních polynomů. (Užíváme podstatně, že $\mathbf{Z}_p[x]$ je okruh s jednoznačným rozkladem na ireducibilní prvky.)

Formálním logaritmováním hořejší identity dostáváme

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\frac{(px)^n}{n} &= \sum_{d\geq 1} a_d \log\frac{1}{1-x^d} \\ &= \sum_{d\geq 1} a_d \sum_{m\geq 1}\frac{dx^{dm}}{dm} \\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}\sum_{d\backslash n} da_d \ .\end{aligned}$$

Porovnání koeficientů u x^n vede ke vztahu

$$p^n = \sum_{d\backslash n} da_d \ .$$

Podle Möbiovy inverzní formule (tvrzení 7 v kapitole 1),

$$na_n = \sum_{d\backslash n} p^d \mu(n/d) \ .$$

Odtud plyne formule pro a_n. $\diamondsuit$

Kombinací věty a lemmatu 88 dostáváme

Tvrzení 90 (existence F). *Pro každé prvočíslo p a každé $n \in \mathbf{N}$ existuje konečné pole s p^n prvky.*

Důkaz. Z

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{d\backslash n} p^d\mu(n/d) &\geq \frac{p^n - p^{n-1} - p^{n-2} - \cdots - p - 1}{n} \\ &= \frac{(p-2)p^n + 1}{n(p-1)} \\ &> 0\end{aligned}$$

plyne, že pro každý stupeň n máme v $\mathbf{Z}_p[x]$ ireducibilní polynom. $\diamondsuit$

Jiný, algebraický důkaz existence konečného pole je popsán v úloze 6. Jednoznačně určené konečné pole s p^n prvky budeme značit $\mathrm{GF}(p^n)$.

Tvrzení 91 (podpole F). *Každé podpole pole $F = \mathrm{GF}(p^n)$ je izomorfní $\mathrm{GF}(p^m)$, přičemž m dělí n. Naopak, pro každý dělitel m čísla n má $\mathrm{GF}(p^n)$ právě jedno podpole s p^m prvky.*

DŮKAZ. Je-li G podpole F, má G charakteristiku p a $|G| = p^m$ pro nějaké $m \in \mathbf{N}$. F je vektorový prostor nad G, a tak $|F| = |G|^k$ pro nějaké $k \in \mathbf{N}$. Takže $n = mk$.

Naopak, nechť $n = mk$. Položíme $s = p^n$ a $t = p^m$ a uvážíme množinu

$$G = \{\alpha \in F : \ \alpha^t = \alpha\} \ .$$

Jde o kořeny polynomu $x^t - x$. Protože $m \backslash n$, $(t-1)\backslash(s-1)$ a $x^t - x = x(x^{t-1} - 1)$ dělí $x^s - x = x(x^{s-1} - 1)$. Polynom $x^s - x$ se rozkládá na s různých lineárních faktorů $x - \alpha, \alpha \in F$. Proto má $x^t - x$ v F t různých kořenů a $|G| = t = p^m$.

Ukážeme, že G je pole. Nechť $\alpha, \beta \in G, \beta \neq 0_G$. Pak $(\alpha/\beta)^t = \alpha^t/\beta^t = \alpha/\beta$ a $\alpha/\beta \in G$. Uzavřenost na rozdíl plyne z identity

$$(\alpha - \beta)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}_F \alpha^i(-\beta)^{p-i} = \alpha^p - \beta^p \ .$$

Ta platí díky tomu, že $\binom{p}{i}_F = 0_F$ pro $0 < i < p$. Po m umocněních na p dostaneme

$$(\alpha - \beta)^t = \alpha^t - \beta^t = \alpha - \beta \ ,$$

a tak i $\alpha - \beta \in G$.

Nechť G' je libovolné podpole F s $t = p^m$ prvky. Patrně $\alpha^t = \alpha$ pro každé $\alpha \in G'$. G' se skládá z kořenů $x^t - x$ a $G' = G$. $\diamondsuit$

Tvrzení 92 (shrnutí). *Každé konečné pole F má charakteristiku p a p^n prvků, kde p je prvočíslo. Pro každé prvočíslo p a $n \in \mathbf{N}$ existuje až na izomorfismus jediné pole s p^n prvky, které značíme jako $\mathrm{GF}(p^n)$. Grupa F^* (multiplikativní grupa nenulových prvků) je cyklická. Podpole $\mathrm{GF}(p^n)$ jsou právě ta $\mathrm{GF}(p^m)$, že $m\backslash n$, a pro každé $m, m\backslash n$, existuje právě jedno takové podpole.*

Konečná pole použijeme pro konstrukci velkých Sidonových množin. Podmnožina $X \subset \mathbf{N}$ je *Sidonova*, pokud pro každé čtyři prvky $x_1, \ldots, x_4$ z X rovnost $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ platí, jen když $\{x_1, x_2\} = \{x_3, x_4\}$. Jinými slovy, dvoučlenné součty prvků množiny X se neopakují. Ještě jinak řečeno, X je Sidonova, právě když jsou všechny rozdíly $y - x, y \neq x$, prvků $y, x \in X$ různé. Největší mohutnost Sidonovy podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ označíme $\mathrm{Si}(n)$.

Věta 93 (Erdős a Turán, 1941). *Pro $n \in \mathbf{N}$ platí*

$$\mathrm{Si}(n) < n^{1/2} + n^{1/4} + O(1)\ .$$

DŮKAZ. **(Lindström, 1969.)** $1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_m \leq n$ buď m-prvková Sidonova množina X. Pro $k \in \mathbf{N}$ uvážíme sumu

$$S(k, X) = \sum_{i,j} \langle 1 \leq i < j \leq m\ \&\ j - i \leq k \rangle \cdot (x_j - x_i)\ .$$

$S(k, X)$ je součet těch vzdáleností prvků X, které pokrývají méně než k jiných prvků. Hodnotu parametru k zvolíme vhodně v závislosti na n později. Dokážeme nerovnosti

$$\binom{km - \binom{k+1}{2} + 1}{2} \leq S(k, X) < \binom{k+1}{2} n\ .$$

Dolní odhad plyne z toho, že suma $S(k, X)$ má $s = (m-1) + (m-2) + \cdots + (m-k) = km - \binom{k+1}{2}$ sčítanců z $\mathbf{N}$, které jsou vzájemně různé. Proto $S(k, X) \geq 1 + 2 + \cdots + s = \binom{s+1}{2}$. Horní odhad plyne z toho, že $x_j - x_i = (x_{i+1} - x_i) + (x_{i+2} - x_{i+1}) + \cdots + (x_j - x_{j-1})$ a každý elementární rozdíl $x_{i+1} - x_i$ se v $S(k, X)$ objeví nejvýše $1 + 2 + \cdots + k = \binom{k+1}{2}$ krát. Součet elementárních rozdílů je přitom $n - 1$.

Po snadných úpravách odhadu

$$\frac{1}{2}\left(km - \binom{k+1}{2}\right)^2 < \binom{km - \binom{k+1}{2} + 1}{2} < \binom{k+1}{2} n$$

dostaneme nerovnost

$$m < \sqrt{(1 + 1/k)n} + \frac{k+1}{2}\ .$$

Protože $\sqrt{(1+1/k)n} = (1+\frac{1}{2k}+O(k^{-2}))n^{1/2}$, optimální volba k je $k = \lfloor n^{1/4} \rfloor$ a dává nám pro $m = |X|$ dokazovanou nerovnost. $\diamondsuit$

Jak ukazuje následující věta, pro nekonečně mnoho hodnot n je tento odhad $\mathrm{Si}(n)$ téměř nejlepší možný.

Věta 94 (Chowla, 1944; Erdős, 1944). *Nechť $n = m^2+m+1$ a $m = p^r$ je mocnina prvočísla. Pak existuje Sidonova množina $X \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ s $m+1$ prvky. Odtud plyne, že*

$$\mathrm{Si}(n) > \sqrt{n}$$

pro nekonečně mnoho hodnot n.

Důkaz. Sestrojíme množinu $A = \{a_1, a_2, \ldots a_{m+1}\} \subset \mathbf{N}_0$ takovou, že $m^2 + m = (m+1)m$ rozdílů $a_i - a_j, i \neq j$, představuje právě všechny nenulové zbytky modulo $n = m^2+m+1$. Vezmeme tytéž zbytky v množině $\{1, 2, \ldots, n\}$ a dostaneme Sidonovu množinu velikosti $m+1$.

Položíme $m = p^r$, $F = \mathrm{GF}(m)$, $G = \mathrm{GF}(m^3)$ a chápeme F jako podpole G (tvrzení 91). Nechť θ je primitivní element G^* (tvrzení 86). A definujeme jako

$$A = \{0\} \cup \{a \in \mathbf{N} : 1 \leq a \leq m^3 - 1 \ \& \ \theta^a = \theta + c, c \in F\} \ .$$

Patrně $|A| = |F| + 1 = m+1$. Pro důkaz rozdílové vlastnosti A ukážeme, že (i) $\{\theta^a, \theta^b\}$ je lineárně závislá nad F, právě když $a \equiv b \bmod m^2+m+1$ a (ii) θ má nad F stupeň 3.

Vlastnost (i). Jak víme z důkazu tvrzení 91, $x \in G^*$ padne do F, právě když $x^{m-1} - 1_G = 0_G$. Protože $G^* = \{\theta^a : \ a = 1, 2, \ldots, m^3-1\}$, sestává F^* právě z těch θ^a, že a je dělitelné $(m^3-1)/(m-1) = m^2+m+1$. Vlastnost (i) je dokázána, protože F-lineární závislost $\{\theta^a, \theta^b\}$ je ekvivalentní s $\theta^{a-b} \in F$. Vlastnost (ii) se dokazuje stejně, jako že θ má nad $\mathbf{Z}_p$ stupeň $3r$ (úvodní partie důkazu tvrzení 87).

Zpět k A. Vzhledem k tomu, že $\theta \notin F$, je pro různé $c, c' \in F$ množina $\{\theta + c, \theta + c'\}$ lineárně nezávislá nad F. Podle (i) jsou proto různé prvky A nekongruentní modulo m^2+m+1. Nechť nyní $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ a

$$a_1 - a_2 \equiv a_3 - a_4 \bmod m^2 + m + 1 \ .$$

Uvidíme, že $a_1 = a_2$ nebo $a_1 = a_3$. Pro $a \in A$ označíme $L_a(\theta) = \theta^a = \theta + c$ a $L_0(\theta) = 1$. Z kongruence a (i) plyne, že prvky $L_{a_1}(\theta)L_{a_4}(\theta)$ a $L_{a_2}(\theta)L_{a_3}(\theta)$

jsou nad F lineárně závislé. Protože to jsou monické kvadratické polynomy z $F[\theta]$ a platí (ii), je to možné jen tak, že $L_{a_1}(\theta)L_{a_4}(\theta) = L_{a_2}(\theta)L_{a_3}(\theta)$. Rozklad polynomu na lineární faktory je jednoznačný, takže $L_{a_1} = L_{a_2}$ nebo $L_{a_1} = L_{a_3}$. Tudíž $a_1 = a_2$ nebo $a_1 = a_3$. $\diamondsuit$

Další výsledky o Sidonových množinách jsou zmíněny v úlohách 8–10 a v poznámkách.

4.2 Chevalley–Warningova věta a kombinatorika

Věta 95 (Chevalley, 1936; Warning, 1936). *Nechť $F = \mathrm{GF}(p^r)$ je konečné pole a $N \in \mathbf{N}$ počet řešení $(a_1, \ldots, a_m) \in F^m$ soustavy*

$$P_1 = 0_F \;\&\; P_2 = 0_F \;\&\; \ldots \;\&\; P_n = 0_F \ ,$$

kde $P_i \in F[x_1, x_2, \ldots, x_m]$. Pokud

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(P_i) < m \ ,$$

je N dělitelné p.

Nejprve dokážeme

Lemma 96. $F = \mathrm{GF}(p^r)$ *buď konečné pole a $m \in \mathbf{N}$. Pak*

$$\sum_{x \in F} x^m = \begin{cases} -1_F & \ldots \quad (|F|-1)\backslash m \\ 0_F & \ldots \quad \textit{jinak} \ . \end{cases}$$

Důkaz. Pokud $(|F|-1)\backslash m$, pro každé $x \in F^*$ z $x^{|F|-1} = 1_F$ plyne $x^m = 1_F$. Takže

$$\sum_{x \in F} x^m = 0_F + (|F|-1)_F = (p^r)_F - 1_F = -1_F \ ,$$

protože F má charakteristiku p. Pro důkaz druhé části použijeme primitivní element $\alpha \in F^*$ (tvrzení 86). Stačí nám, že pro m nedělitelné $|F|-1$ platí $\alpha^m \neq 1_F$. Probíhá-li x pole F, probíhá je i αx. Proto

$$S = \sum_{x \in F} x^m = \sum_{x \in F} (\alpha x)^m = \alpha^m \sum_{x \in F} x^m = \alpha^m S \ .$$

Tedy $(\alpha^m - 1_F)S = 0_F$ a $S = 0_F$. $\diamondsuit$

DŮKAZ VĚTY 95. Platí identita

$$\sum_{a_1,\dots,a_m} \prod_{j=1}^{n} (1_F - P_j(a_1, a_2, \dots, a_m)^{|F|-1}) = N_F \ ,$$

v níž sčítáme přes všech $|F|^m$ m-tic $(a_1, \dots, a_m) \in F^m$. K jejímu nahlédnutí si stačí uvědomit, že $a^{|F|-1} = 1_F$ pro všechny $a \in F^*$ a $0_F^{|F|-1} = 0_F$.

Podíváme se na výraz vlevo od = jiným způsobem a ukážeme, že je roven 0_F. Protože F má charakteristiku p, lemma 84 dává $N \equiv 0 \bmod p$. Po umocnění a roznásobení máme vlevo F-lineární kombinaci členů typu

$$\sum_{a_1,\dots,a_m} \prod_{i=1}^{m} a_i^{k_i} = \prod_{i=1}^{m} \sum_{a_i \in F} a_i^{k_i} \ .$$

Ale

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \le (|F| - 1) \sum_{i=1}^{n} \deg(P_i) < (|F| - 1)m \ .$$

Některé k_i tudíž splňuje $0 \le k_i < |F| - 1$ a buď $|F| - 1$ nedělí k_i nebo $k_i = 0$. V prvním případě je podle předchozího lemmatu odpovídající suma rovna 0_F. V druhém případě dostáváme sumu $1_F + 1_F + \dots + 1_F = |F|_F$ (proč?), což je rovněž 0_F. Součin je nulový a nulová je i celá lineární kombinace. $\diamondsuit$

Chevalley–Warningovu větu použijeme v kombinatorické teorii čísel. Pro daná přirozená čísla m a n se ptáme, jaký je nejmenší počet v čísel $g_1, g_2, \dots, g_v \in \mathbf{Z}$, který zaručuje, že se mezi nimi vždy najde m čísel se součtem dělitelným n. Pro m nedělitelné n to nezaručí žádné v, špatný je třeba soubor ze samých jedniček. Nechť $m = n$. Jaký je nejmenší počet v, který zaručuje, že se mezi v celými čísly najde n čísel se součtem rovným nule modulo n?

Věta 97 (Erdős, Ginzburg a Ziv, 1961). *Mezi každými $2n - 1$ celými čísly je vždy n čísel, jejichž součet je dělitelný n. Hodnotu $2n - 1$ již nelze snížit.*

DŮKAZ. Dodatek je jasný, soubor $2n - 2$ čísel sestávající z $n - 1$ nul a $n - 1$ jedniček nemá popsanou vlastnost. Nejprve ukážeme, že z platnosti věty pro $n_1 \in \mathbf{N}$ a $n_2 \in \mathbf{N}$ plyne její platnost pro $n_1 n_2$. Buďte dáno $2n_1 n_2 - 1$ celých čísel. Opakovaným užitím předpokladu pro n_1 z nich vybereme $2n_2 - 1$ disjunktních souborů $S_1, S_2, \ldots, S_{2n_2-1}$, každý o n_1 číslech, že $\sum_{x \in S_i} x = m_i n_1$. Na seznam $(m_1, m_2, \ldots, m_{2n_2-1})$ aplikujeme předpoklad pro n_2 a vybereme z něj n_2 čísel se součtem dělitelným n_2. Odpovídajících n_2 souborů S_i vytváří soubor o $n_1 n_2$ číslech, jejichž součet je dělitelný $n_1 n_2$.

Proto větu stačí dokázat jen pro prvočíselné $n = p$. Nechť $g_1, g_2, \ldots, g_{2p-1}$ jsou libovolná celá čísla. Podíváme se na soustavu nad $F = \mathrm{GF}(p) = \mathbf{Z}_p$

$$\begin{aligned} g_1 x_1^{p-1} + g_2 x_2^{p-1} + \cdots + g_{2p-1} x_{2p-1}^{p-1} &= 0_F \\ x_1^{p-1} + x_2^{p-1} + \cdots + x_{2p-1}^{p-1} &= 0_F \;. \end{aligned}$$

Předpoklady Chevalley–Warningovy věty jsou splněny: $p-1+p-1 < 2p-1$. Jedno řešení je triviální řešení ze samých nul. Podle věty 95 tedy existuje alespoň $p-1 \geq 1$ netriviálních řešení. Vezmeme jedno z nich, $(z_1, z_2, \ldots, z_{2p-1}) \in \mathbf{Z}_p^{2p-1}$, a položíme $S = (g_i :\ z_i \neq 0_F)$. Díky Malé Fermatově větě z první rovnice vyplývá, že $\sum_{x \in S} x \equiv 0 \bmod p$, a z druhé, že p dělí $|S|$. Protože $0 < |S| < 2p$, je $|S| = p$. S je hledaná p-tice. $\diamondsuit$

Pro zobecnění Erdős–Ginzburg–Zivovy věty viz poznámky a úlohy 12 a 13.

Druhé použití Chevalley-Warningovy věty je z kombinatoriky, z teorie grafů. *Grafem* rozumíme strukturu $G = (V, E)$, kde V je konečná množina *vrcholů* a E je multipodmnožina (prvky se mohou opakovat) množiny $\{\{x, y\} :\ x, y \in V, x \neq y\}$. Prvkům E se říká *hrany*. Dva různé vrcholy x a y jsou tedy spojeny k hranami, kde k je násobnost $\{x, y\}$ v E. *Stupeň* vrcholu x je součet násobností hran, jichž je x prvkem. G je k-*regulární*, mají-li všechny vrcholy stupeň k. $H = (V', E')$ je *podgrafem* G, pokud $V' \subset V$ a $E' \subset E$ (násobnost každé $e \in E'$ v E' je menší nebo rovna násobnosti e v E). To, čemu zde říkáme graf, se v teorii grafů obvykle označuje jako multigraf.

Za příklad nám poslouží graf

$$H = (V, E)\ ,\ V = \{1, 2, 3, 4, 5\} \ \text{ a } \ E = \{\{1, 3\}_1, \{1, 3\}_2, \{1, 2\}, \{1, 4\}\}\ .$$

Má 5 vrcholů a 4 hrany, hrana $\{1, 3\}$ je dvojnásobná, vrchol 1 má stupeň 4, 3 má stupeň 2, 2 a 4 mají stupeň 1 a 5 má stupeň 0.

Věta 98 (Alon, Friedland a Kalai, 1984). *Každý graf, který vznikne ze 4-regulárního grafu přidáním jediné hrany, obsahuje neprázdný 3-regulární podgraf.*

Důkaz. $G=(V,E)$ buď náš graf. Budeme pracovat v $F=\mathrm{GF}(3)=\mathbf{Z}_3$. Definujeme matici s prvky $a(v,e)$, $v\in V$, $e\in E$,

$$a(v,e)=\begin{cases} 0_F & \dots\ v\notin e \\ 1_F & \dots\ v\in e\ . \end{cases}$$

Za každý řádek $v\in V$ matice vezmeme rovnici

$$\sum_{e\in E} a(v,e)x_e^2 = 0_F\ .$$

Celkem máme $|V|=n$ rovnic, součet jejich stupňů je $2n$. Není těžké vidět, že G má $2n+1$ hran, což je počet neznámých. Podle Chevalley–Warningovy věty kromě triviálního nulového řešení existuje i řešení (dokonce alespoň dvě) $(z_e:\ e\in E)$, v němž ne všechny z_e jsou nulové. Neprázdná podmnožina $E'\subset E$, $e\in E' \iff z_e\neq 0_F$, definuje podgraf $G'=(W,E')=(\bigcup E',E')$. Pro každý vrchol $v\in W$ je součet v řádku v dělitelný třemi a G' má všechny stupně dělitelné třemi. Tyto stupně však leží v množině $\{1,2,3,4,5\}$, a tak je G' 3-regulární. $\diamondsuit$

Lze sestrojit 4-regulární grafy, které neobsahují ani jeden neprázdný 3-regulární podgraf (úloha 11).

4.3 Zlatá věta

Řekneme, že $a\in\mathbf{Z}$ je *kvadratický zbytek modulo* $m\in\mathbf{N}$, pokud kongruence

$$x^2\equiv a \bmod m$$

má řešení $x\in\mathbf{Z}$. V opačném případě a nazveme *kvadratickým nezbytkem modulo* m. V tomto oddílu vždy $a\in\mathbf{Z}$ a $m\in\mathbf{N}$.

Nechť $d=(a,m)>1$ a p je prvočíslo s $\mathrm{ord}_p(d)=k>0$. Položíme $a'=a/p^k$ a $m'=m/p^k$. Pokud $k=2l$, je hořejší kongruence ekvivalentní kongruenci stejného typu $y^2\equiv a' \bmod m'$, kde $x=p^l y$. Pokud $k=2l-1$, je ekvivalentní kongruenci $py^2\equiv a' \bmod m'$, kde opět $x=p^l y$, a pro $p\backslash m'$ tedy nemá řešení (p nedělí současně a' a m'). Pro $p\perp m'$ je ekvivalentní kongruenci stejného typu $y^2\equiv ba' \bmod m'$, kde $b\in\mathbf{Z}$ splňuje $pb\equiv 1 \bmod m'$ (a $x=p^l y$). Krácením prvočinitelů (a,m) tak umíme hořejší kongruenci převést na ekvivalentní kongruenci $y^2\equiv a' \bmod m'$, kde $a'\perp m'$, nebo dokázat, že $x^2\equiv a \bmod m$ nemá řešení. Proto se v dalším omezíme na případ $a\perp m$.

Lemma 99. *Je-li* $m = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_r^{l_r} = m_1 m_2 \dots m_r$, *kde* $m_i = p_i^{l_i}$, *prvočíselný rozklad* m, *je kongruence*

$$x^2 \equiv a \bmod m$$

ekvivalentní soustavě

$$x_1^2 \equiv a \bmod m_1 \ \& \ \dots \ \& \ x_r^2 \equiv a \bmod m_r \ ,$$

kde

$$x \equiv x_1 \bmod m_1 \ \& \ \dots \ \& \ x \equiv x_r \bmod m_r \ .$$

DůKAZ. Je-li $x = u \in \mathbf{Z}$ řešení kongruence, je $x_1 = x_2 = \dots = x_r = u$ řešení soustavy. Je-li $u_1, \dots, u_r$ řešení soustavy, existuje podle tvrzení 5 číslo $u \in \mathbf{Z}$ takové, že $u \equiv u_i \bmod m_i$ pro $i = 1, \dots, r$. Tudíž $u^2 \equiv a \bmod m_i$ pro všechna i a, díky vzájemné nesoudělnosti m_i, $u^2 \equiv a \bmod m$. ♢

Proto se stačí omezit na případ modulu rovného mocnině prvočísla, $m = p^e$.

Tvrzení 100 (redukce modulu z p^e na p). *Nechť* p *je prvočíslo nedělící číslo* a.

1. *Pokud* $p > 2$, *má kongruence* $x^2 \equiv a \bmod p^e$ *řešení buď pro všechny exponenty* $e \in \mathbf{N}$ *nebo pro žádný z nich.*

2. *Pokud* $p = 2$, *má kongruence* $x^2 \equiv a \bmod 2^e$ *řešení buď pro všechny exponenty* $e \in \mathbf{N} \ \& \ e \geq 3$ *nebo pro žádný z nich.*

DůKAZ. **1.** Řešení pro nějaký exponent $e \in \mathbf{N}$ je řešením i pro $e = 1$. Stačí tedy ukázat, jak z řešení x_0 kongruence $x^2 \equiv a \bmod p^e$ odvodit řešení x_1 pro exponent $e + 1$. Položíme $x_1 = x_0 + bp^e$. Pak

$$x_1^2 \equiv x_0^2 + 2x_0 b p^e \bmod p^{e+1} \ .$$

Dostáváme

$$x_1^2 \equiv a \bmod p^{e+1} \iff 2x_0 b \equiv \frac{a - x_0^2}{p^e} \bmod p \ .$$

Protože $2x_0 \not\equiv 0 \bmod p$, existuje řešení b a tím pádem i řešení x_1.

2. Důkaz je podobný. Nechť x_0 je řešením kongruence $x^2 \equiv a \bmod 2^e, e \geq 3$. Položíme $x_1 = x_0 + b2^{e-1}$. Zřejmě

$$x_1^2 = x_0^2 + x_0 b 2^e + b^2 2^{2e-2} \equiv x_0^2 + x_0 b 2^e \bmod 2^{e+1} \ .$$

Dostáváme

$$x_1^2 \equiv a \bmod 2^{e+1} \quad \Longleftrightarrow \quad b \equiv \frac{a - x_0^2}{2^e} \bmod 2\ ,$$

neboť $x_0 \equiv 1 \bmod 2$. Toto b dává řešení x_1 modulo 2^{e+1}. $\diamondsuit$

Podmínku $e \geq 3$ pro $p = 2$ nelze vynechat: $x^2 \equiv 5 \bmod 2^e$ má řešení jen pro $e = 1$ a 2.

Tvrzení 101 (rekapitulace). *V kongruenci*

$$x^2 \equiv a \bmod m$$

můžeme předpokládat, že $a \perp m$. *Nechť* $m = 2^l p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_r^{l_r}$, *kde* p_i *jsou různá lichá prvočísla, je prvočíselný rozklad čísla* m. *Kongruence má řešení, právě když platí podmínky 1 a 2.*

1. *Pro* $l = 1$ *se nepožaduje nic. Pokud* $l = 2$, $a \equiv 1 \bmod 4$. *Pokud* $l \geq 3$, $a \equiv 1 \bmod 8$.

2. *Kongruence* $x^2 \equiv a \bmod p_i$ *má řešení pro každé* $i = 1, \dots, r$.

Důkaz. Argument před lemmatem 99, lemma 99 a tvrzení 100. $\diamondsuit$

Úlohu rozhodnout, zda a je kvadratický zbytek modulo m, jsme redukovali na tutéž úlohu pro lichý prvočíselný modul. Na ni se teď soustředíme.

Tvrzení 102 (je jich stejně). *Pro každé prvočíslo* $p > 2$ *máme v množině* $\{1, 2, \dots, p-1\}$ *právě* $\frac{p-1}{2}$ *kvadratických zbytků a* $\frac{p-1}{2}$ *kvadratických nezbytků modulo* p.

Důkaz. Probíhá-li x čísla $1, 2, \dots, p-1$, probíhá číslo x^2 (redukované modulo p) právě všechny kvadratické zbytky v uvedené množině. Každý z nich se vyskytne přesně dvakrát, protože $x^2 \equiv y^2 \bmod p$ je ekvivalentní s $(x-y)(x+y) \equiv 0$ a to s (p je prvočíslo) $x \equiv \pm y$. $\diamondsuit$

Legendreův symbol $(\frac{a}{p})$ je definován pro prvočíslo $p > 2$ a číslo $a \in \mathbf{Z}$ jako

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \dots\ p \backslash a \\ 1 & \dots\ p \perp a,\ a \text{ je kvadratický zbytek modulo } p \\ -1 & \dots\ p \perp a,\ a \text{ je kvadratický nezbytek modulo } p\ . \end{cases}$$

Tvrzení 103 (vlastnosti Legendreova symbolu). *Nechť p je liché prvočíslo a $a, b \in \mathbf{Z}$. Pak platí*

1. $(\frac{a}{p}) \equiv a^{(p-1)/2} \bmod p$.

2. $(\frac{ab}{p}) = (\frac{a}{p})(\frac{b}{p})$.

3. $a \equiv b \bmod p \Rightarrow (\frac{a}{p}) = (\frac{b}{p})$.

Důkaz. **1.** Této vlastnosti se někdy říká *Eulerovo kritérium (kvadratických zbytků)*. Nechť $a \perp p$ (pro $p \backslash a$ zřejmě platí). Z Malé Fermatovy věty plyne, že

$$(a^{(p-1)/2} - 1)(a^{(p-1)/2} + 1) \equiv 0 \bmod p \ .$$

Proto je $a^{(p-1)/2}$ modulo p vždy 1 nebo -1. Je-li $a \equiv b^2$ kvadratický zbytek, musí to být 1, protože pak $a^{(p-1)/2} \equiv b^{p-1}$. Tím jsou, podle předchozího tvrzení, vyčerpána všechna řešení rovnice $x^{(p-1)/2} = 1_F$ v $F = \mathbf{Z}_p$ a pro nezbytky dostáváme -1. (Stejný trik jako v důkazu tvrzení 86.)

2. Vlastnost 2 plyne z vlastnosti 1:

$$\left(\frac{ab}{p}\right) \equiv (ab)^{(p-1)/2} = a^{(p-1)/2} b^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) \bmod p \ .$$

Tudíž $(\frac{ab}{p}) \equiv (\frac{a}{p})(\frac{b}{p}) \bmod p$. Protože hodnota Legendreova symbolu je 0 nebo ± 1, platí $(\frac{ab}{p}) = (\frac{a}{p})(\frac{b}{p})$.

3. To plyne přímo z definice. ◊

Pracuje se i s obecnějším *Jacobiho symbolem*, jehož „jmenovatel“ nemusí být prvočíslo (úloha 15).

Jako $S(p)$ si označíme množinu

$$S(p) = \{-\tfrac{1}{2}(p-1), -\tfrac{1}{2}(p-3), \ldots, -1, 1, \ldots, \tfrac{1}{2}(p-3), \tfrac{1}{2}(p-1)\} \ .$$

Jde o systém $p-1$ v absolutní hodnotě nejmenších nenulových zbytků modulo p. Pro $a \in \mathbf{Z}$ nedělitelné p definujeme posloupnost délky $\frac{1}{2}(p-1)$

$$M(a) = (a_k \in S(p) : \ 1 \le k \le \tfrac{1}{2}(p-1), \ ka \equiv a_k \bmod p)$$

a jako $m(a)$ označíme počet jejích záporných členů. Například pro $p = 17$ máme

$$M(7) = (7, -3, 4, -6, 1, 8, -2, 5) \ \text{ a } \ m(7) = 3 \ .$$

Dva členy $M(a)$ s různým indexem jsou různé a liší se více než znaménkem: Z $a_k = \pm a_l$ plyne $ka \equiv \pm la \bmod p$, odtud $k \pm l \equiv 0$, takže $k = l$. Posloupnost $M(a)^+$, která vznikne změnou znaménka u záporných členů, je proto permutací posloupnosti $1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(p-1)$.

Nahradíme-li $S(p)$ obvyklým systémem nenulových zbytků $Z(p) = \{1, 2, \ldots, p-1\}$, dostaneme posloupnost

$$N(a) = (b_k \in Z(p) :\ 1 \leq k \leq \tfrac{1}{2}(p-1),\ ka \equiv b_k \bmod p)$$

a číslo $n(a)$ rovné počtu jejích *velkých* členů, které přesahují $\frac{1}{2}(p-1)$. Ostatním b_k budeme říkat *malé* členy. $N(a)^-$ vznikne náhradou velkých b_k číslem $p - b_k$. Ze stejného důvodu jako výše je $N(a)^-$ permutace posloupnosti $1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(p-1)$. Posun $x \to x - p$ poskytuje bijekci mezi velkými členy $N(a)$ a zápornými členy $M(a)$. Tudíž $n(a) = m(a)$.

Tvrzení 104 (Gaussovo lemma). *Pro prvočíslo $p > 2$ a $a \in \mathbf{Z}$, $a \perp p$, platí*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{m(a)} = (-1)^{n(a)} \ .$$

Důkaz. Uvažme výše definovanou množinu

$$M(a)^+ = \{m_1, m_2, \ldots, m_{(p-1)/2}\} = \{1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}(p-1)\} \ .$$

Pronásobením kongruencí

$$1 \cdot a \equiv \pm m_1 \bmod p \ , \ 2 \cdot a \equiv \pm m_2 \bmod p \ , \ \ldots \ , \ \tfrac{1}{2}(p-1) \cdot a \equiv \pm m_{(p-1)/2} \bmod p$$

dostaneme

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)! \cdot a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{m(a)} \left(\frac{p-1}{2}\right)! \bmod p \ .$$

Po zkrácení $(\frac{1}{2}(p-1))!$ a užití Eulerova kritéria máme

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{m(a)} \ .$$

$\diamondsuit$

Tvrzení 105 (1. a 2. dodatek zákona reciprocity). *Nechť $p > 2$ je prvočíslo.*

1. *První dodatek zákona reciprocity říká, že*

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2} = \begin{cases} 1 & \ldots \quad p \equiv 1 \bmod 4 \\ -1 & \ldots \quad p \equiv 3 \bmod 4 \;. \end{cases}$$

2. *Druhý dodatek zákona reciprocity říká, že*

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8} = \begin{cases} 1 & \ldots \quad p \equiv 1,7 \bmod 8 \\ -1 & \ldots \quad p \equiv 3,5 \bmod 8 \;. \end{cases}$$

DŮKAZ. **1.** Vlastnost 1 je bezprostřední aplikací Eulerova kritéria z tvrzení 103.

2. Číslo $m(2) = n(2)$, pro dané liché prvočíslo p, je počet čísel $1 \cdot 2, 2 \cdot 2, \ldots, \frac{1}{2}(p-1) \cdot 2 = p-1$ větších než $\frac{1}{2}(p-1)$. Tedy

$$n(2) = \frac{p-1}{2} - \left\lfloor \frac{p-1}{4} \right\rfloor \;.$$

Vše závisí na zbytku p při dělení osmi. Třeba pro $p = 8n+5$ vychází $n(2) = 4n+2-(2n+1) = 2n+1$ a podle Gaussova lemmatu je 2 pro takové p kvadratický nezbytek. Zbylé tři případy $p = 8n+1, 8n+3$ a $p = 8n+7$ se určí obdobně. $\diamondsuit$

Věta 106 (Gauss, 1796). *Nechť $p, q > 2$ jsou různá prvočísla. Zákon reciprocity kvadratických zbytků praví, že*

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right) \;.$$

Jinak řečeno,

$$\begin{aligned} \left(\frac{q}{p}\right) &= \left(\frac{p}{q}\right) \text{ \textit{pokud} } p \equiv 1 \bmod 4 \text{ \textit{nebo} } q \equiv 1 \bmod 4 \text{ \textit{a}} \\ \left(\frac{q}{p}\right) &= -\left(\frac{p}{q}\right) \text{ \textit{pokud} } p \equiv 3 \bmod 4 \text{ \textit{a} } q \equiv 3 \bmod 4 \;. \end{aligned}$$

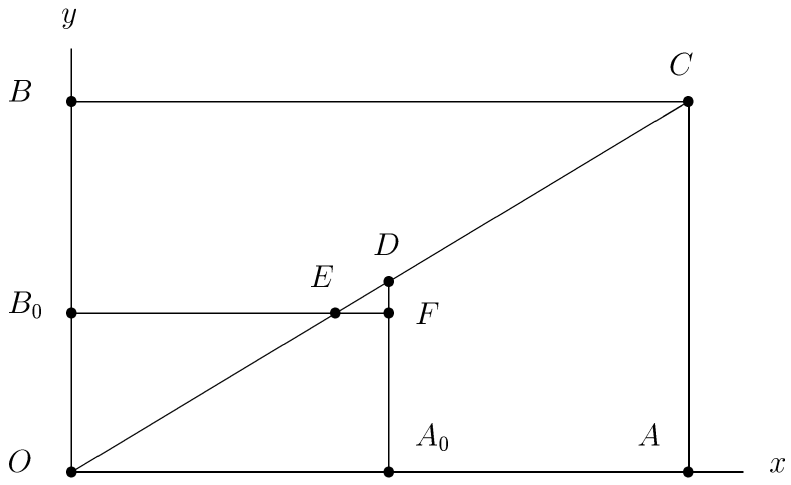
Nechť a a b jsou dvě přirozená čísla, která jsou různá, nesoudělná a lichá. Nejprve dokážeme lemma o součtu

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{(a-1)/2} \left\lfloor \frac{ib}{a} \right\rfloor \;.$$

Lemma 107. *Platí*

$$S(a,b) + S(b,a) = \frac{a-1}{2} \cdot \frac{b-1}{2} \ .$$

Důkaz. Nechť $a > b$. Na obrázku níže $O = (0,0)$, $A = (a,0)$, $A_0 = (\frac{1}{2}(a-1),0)$, $B = (0,b)$, $B_0 = (0, \frac{1}{2}(b-1))$, $C = (a,b)$ a $F = (\frac{1}{2}(a-1), \frac{1}{2}(b-1))$. Body E a D jsou průsečíky přímky OC s přímkami B_0F a A_0F. Skutečně $D_y = \frac{1}{2}(a-1)(b/a) > F_y = \frac{1}{2}(b-1)$.



Součet vlevo je počet mřížových bodů v trojúhelníku OA_0D plus počet mřížových bodů v trojúhelníku OB_0E, bez os x a y. Na úsečce OC neleží kromě O a C žádné mřížové body, protože $a \perp b$. Průnik trojúhelníků, úsečka OE, proto neobsahuje mřížový bod kromě O. Rovněž úsečka FD neobsahuje mřížový bod kromě F, protože $D_y = \frac{1}{2}(a-1)(b/a) < F_y + 1 = \frac{1}{2}(b+1)$. Uvnitř trojúhelníku EFD proto neleží mřížový bod. $S(a,b)+S(b,a)$ se proto rovná počtu mřížových bodů v obdélníku OA_0FB_0, bez os x a y. Což je $\frac{1}{2}(a-1) \cdot \frac{1}{2}(b-1)$. $\diamondsuit$

Důkaz věty 106. Nechť $p > q$ jsou dvě lichá prvočísla. Uvažme posloupnost $N(q)^-$ délky $\frac{1}{2}(p-1)$ a číslo $n(q)$, které jsme zavedli před Gaussovým lemmatem. Protože $N(q)^-$ je permutace čísel $1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(p-1)$, sečtením jejích prvků dostaneme první rovnost

$$\frac{p^2-1}{8} = r + n(q)p - t \ ,$$

kde r je součet malých členů $N(q)$ a t je součet velkých členů. Explicitní vyjádření členu b_k posloupnosti $N(q)$ je

$$kq = p\left\lfloor \frac{kq}{p} \right\rfloor + b_k \ .$$

Sečtením pro $k = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(p-1)$ dostáváme druhou rovnost

$$\frac{q(p^2-1)}{8} = pS(p,q) + r + t \ .$$

Odečtením první rovnosti od druhé dostaneme

$$\frac{(q-1)(p^2-1)}{8} = pS(p,q) + 2t - n(q)p \ .$$

Levá strana je sudé číslo, a tak

$$S(p,q) \equiv n(q) \bmod 2 \ .$$

Podle Gaussova lemmatu

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{n(q)} = (-1)^{S(p,q)} \ .$$

Po záměně p a q obdobně

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{n(p)} = (-1)^{S(q,p)} \ .$$

Lemma 107 dává

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{S(p,q)+S(q,p)} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \ .$$

To je zákon reciprocity. $\diamondsuit$

V předešlých kapitolách jsme teorii kvadratických zbytků použili dvakrát. V kapitole 2 jsme v důkazu věty 20 využili skutečnosti, že pro prvočísla tvaru $p = 4n + 1$ je -1 kvadratický zbytek. To plyne z 1 tvrzení 105. V kapitole 3 jsme v důkazu tvrzení 52 potřebovali vědět, že pokud -3 je kvadratický zbytek modulo p, platí $p \equiv 1 \bmod 3$. Vskutku, podle 2 tvrzení 103, 1 tvrzení 105, věty 106 a 3 tvrzení 103 máme

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2} \cdot (-1)^{(p-1)/2\cdot(3-1)/2}\left(\frac{p}{3}\right) \\ &= \left(\frac{p}{3}\right) \\ &= \left(\frac{\mathrm{zby}(p,3)}{3}\right) . \end{aligned}$$

Platí dokonce ekvivalence $(\frac{-3}{p}) = 1 \Leftrightarrow p \equiv 1 \bmod 3$.

Jako příklad zjistíme, zda 1986 je kvadratický zbytek modulo 49985 (obě čísla jsou nesoudělná). Protože prvočíselný rozklad modulu je $49985 = 5^2 \cdot 1999$, musíme určit hodnoty dvou Legendreových symbolů. Pomocí vlastností Legendreova symbolu a zákona reciprocity s doplňky spočítáme, že

$$\begin{aligned} \left(\frac{1986}{1999}\right) &= \left(\frac{2}{1999}\right)\left(\frac{3}{1999}\right)\left(\frac{331}{1999}\right) \\ &= 1\cdot(-1)\left(\frac{1999}{3}\right)\cdot(-1)\left(\frac{1999}{331}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{13}{331}\right) \\ &= \left(\frac{331}{13}\right) = \left(\frac{6}{13}\right) = \left(\frac{2}{13}\right)\left(\frac{3}{13}\right) \\ &= (-1)\cdot\left(\frac{13}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= -1 . \end{aligned}$$

Druhý výpočet je snadný a vlastně už zbytečný:

$$\left(\frac{1986}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right) = 1 .$$

Podle (triviální části) tvrzení 101 je číslo 1986 modulo 49985 kvadratický nezbytek.

Oddíl zakončíme alternativním Eisensteinovým důkazem zákona reciprocity pomocí komplexních čísel. Vždy $n \in \mathbf{N}$ a $\zeta = \exp(2\pi i/n) \in \mathbf{C}$ je primitivní n-tá odmocnina z 1.

Lemma 108. *Nechť n je liché. Pak*

$$x^n - y^n = \prod_{k=0}^{n-1} (\zeta^k x - \zeta^{-k} y) \ .$$

DŮKAZ. Máme faktorizaci $z^n - 1 = (z - \zeta^0)(z - \zeta^1) \cdots (z - \zeta^{n-1})$. Substituce $z = x/y$ dává

$$x^n - y^n = \prod_{k=0}^{n-1} (x - \zeta^k y) \ .$$

Protože n je liché, probíhá spolu s k úplný systém zbytků modulo n i $-2k$. Tudíž

$$\begin{aligned} x^n - y^n &= \prod_{k=0}^{n-1} (x - \zeta^{-2k} y) \\ &= \zeta^{-(0+1+2+\cdots+(n-1))} \prod_{k=0}^{n-1} (\zeta^k x - \zeta^{-k} y) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} (\zeta^k x - \zeta^{-k} y) \ . \end{aligned}$$

(Pro liché n máme $\zeta^{n(n-1)/2} = 1$.) $\diamondsuit$

Klíčovým nástrojem je komplexní funkce

$$f(z) = \mathrm{e}^{2\pi i z} - \mathrm{e}^{-2\pi i z} = 2i \sin(2\pi z) \ .$$

Zřejmě $f(z+1) = f(z)$ (f je periodická s periodou 1), $f(-z) = -f(z)$ (f je lichá funkce) a $f(z) \neq 0 \Leftrightarrow 2z \notin \mathbf{Z}$.

Lemma 109. *Pro každé liché n a $z \in \mathbf{C}$, $2z \notin \mathbf{Z}$,*

$$\frac{f(nz)}{f(z)} = \prod_{k=1}^{(n-1)/2} f(z + k/n) f(z - k/n) \ .$$

DŮKAZ. V předcházejícím lemmatu dosadíme $x = \mathrm{e}^{2\pi i z}$ a $y = \mathrm{e}^{-2\pi i z}$:

$$f(nz) = \prod_{k=0}^{n-1} f(z + k/n) \ .$$

Proto
$$\frac{f(nz)}{f(z)} = \prod_{k=1}^{(n-1)/2} f(z+k/n) \prod_{k=(n+1)/2}^{n-1} f(z+k/n) \ .$$
Protože $f(z+k/n) = f(z-(n-k)/n)$ (vlastnosti f), je poslední součin roven
$$\prod_{k=1}^{(n-1)/2} f(z-k/n) \ .$$
$\diamondsuit$

Lemma 110. *Nechť $p > 2$ je prvočíslo, $a \in \mathbf{Z}$ a p nedělí a. Pak*
$$\prod_{l=1}^{(p-1)/2} f(la/p) = \left(\frac{a}{p}\right) \prod_{l=1}^{(p-1)/2} f(l/p) \ .$$

Důkaz. Pro $l = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(p-1)$ vynásobíme $f(\pm m_l/p)$, kde $\pm m_l$ jsou členy posloupnosti $M(a)^+$. Jak víme, $M(a)^+$ je permutace čísel $1, 2, \dots, \frac{1}{2}(p-1)$. Z $la \equiv m_l$ mod p a vlastností f plyne, že
$$f(\pm m_l/p) = \pm f(m_l/p) = \pm f(la/p) \ .$$
Tudíž
$$\prod_{l=1}^{(p-1)/2} f(l/p) = \prod_{l=1}^{(p-1)/2} f(\pm m_l/p) = (-1)^{m(a)} \prod_{l=1}^{(p-1)/2} f(la/p) \ ,$$
kde $m(a)$ je počet znamének $-$ v $\pm m_l$. Nyní stačít užít tvrzení 104. $\diamondsuit$

Důkaz věty 106. **(Eisenstein, 1844.)** p, q buďte dvě různá lichá prvočísla. Podle předchozího lemmatu
$$\prod_{l=1}^{(p-1)/2} f(lq/p) = \left(\frac{q}{p}\right) \prod_{l=1}^{(p-1)/2} f(l/p) \ .$$
Podle lemmatu 109 platí
$$\frac{f(lq/p)}{f(l/p)} = \prod_{m=1}^{(q-1)/2} f(l/p+m/q) f(l/p-m/q) \ .$$

Sloučením obou vztahů získáme první rovnici a jako vedlejší výsledek pozoruhodnou identitu mezi Legendreovým symbolem a funkcí sinus:

$$\begin{aligned} \left(\frac{q}{p}\right) &= \prod_{l=1}^{(p-1)/2} \prod_{m=1}^{(q-1)/2} f(l/p+m/q) f(l/p-m/q) \\ &= (-4)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \prod_{l=1}^{(p-1)/2} \prod_{m=1}^{(q-1)/2} \sin(2\pi(l/p+m/q)) \cdot \sin(2\pi(l/p-m/q)) \ . \end{aligned}$$

Jednodušší identita stejného typu je popsána v úloze 14.

Záměnou $p \leftrightarrow q$ a $l \leftrightarrow m$ získáme druhou rovnici

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \prod_{l=1}^{(p-1)/2} \prod_{m=1}^{(q-1)/2} f(l/p+m/q) f(m/q-l/p) \ .$$

Z porovnání obou rovnic a lichosti f plyne, že

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right) \ .$$

4.4 Weilova věta pro $F = \mathbf{Z}_p$

Pro pole F označuje $\overline{F}$ jeho algebraický uzávěr. $X, Y, \ldots$ označují neznámé a $x, y, \ldots$ jejich konkrétní hodnoty. Polynomy budeme označovat velkými latinskými písmeny, kromě symetrických polynomů e_i. *Absolutně ireducibilní* je ten polynom $P \in F[X,Y]$, který je ireducibilní i v $\overline{F}[X,Y]$. Platí následující fundamentální věta o počtu řešení polynomiální rovnice v konečném poli.

Věta 111 (Weil, 1948). *Nechť $F = \mathrm{GF}(p^r)$ je konečné pole a $P \in F[X,Y]$ absolutně ireducibilní polynom. Počet řešení N rovnice $P = 0_F$ splňuje odhad*

$$N = \sum_{x,y \in F} \langle P(x,y) = 0_F \rangle = |F| + O(|F|^{1/2}) \ ,$$

kde konstanta v O závisí pouze na $\deg(P)$.

Weil dokázal silnější výsledek, který vysvětlíme v poznámkách. Větu v této obecnosti nedokážeme. Omezíme se na případ $F = \mathbf{Z}_p$ a dokážeme

Tvrzení 112 (Weil pro $F = \mathbf{Z}_p$). *Pro každé prvočíslo p a absolutně ireducibilní polynom $P \in \mathbf{Z}_p[X,Y]$ stupně d, přičemž platí nerovnost $p > 250d^5$, počet řešení N polynomiální kongruence $P(X,Y) \equiv 0 \bmod p$ splňuje odhad*

$$|N - p| < \sqrt{2d^5} \cdot \sqrt{p}\ .$$

Omezuje nás pouze rozsah skript. Po překonání potíží s derivováním v poli nenulové charakteristiky, což je ryze algebraická záležitost, umí elementární Stěpanovova–Schmidtova metoda, kterou si předvedeme v akci pro $F = \mathbf{Z}_p$, dokázat větu 111 v plné síle.

Dva příklady osvětlí nutnost požadavku absolutní ireducibility, bez něhož tvrzení 112 neplatí. První příklad: kongruence $Y^2 \equiv X^2 \bmod p$. Má $2p-1$ řešení $y = \pm x$. Polynom $P(X,Y) = X^2 - Y^2$ se totiž rozkládá už v $\mathbf{Z}_p[X,Y]$. Druhý příklad: kongruence

$$Y^2 \equiv -X^4 - 2X^2 - 1 \bmod p\ ,$$

kde $p \equiv 3 \bmod 4$. Nyní je polynom

$$P(X,Y) = Y^2 + X^4 + 2X^2 + 1 = (Y - \sqrt{-1}(X^2+1)) \cdot (Y + \sqrt{-1}(X^2+1))$$

ireducibilní v $\mathbf{Z}_p[X,Y]$, protože $\sqrt{-1} \in \overline{\mathbf{Z}_p} \setminus \mathbf{Z}_p$ pro takové p podle 1 tvrzení 105 ($\sqrt{-1}$ zde znamená $\sqrt{(-1)_{\mathbf{Z}_p}}$). Není ale pochopitelně absolutně ireducibilní. Hledáme tedy všechna $x, y \in \mathbf{Z}_p$ taková, že $y - \sqrt{-1}(x^2+1)$ nebo $y + \sqrt{-1}(x^2+1)$ je nula. Avšak 1 a $\sqrt{-1}$ jsou lineárně nezávislé nad $\mathbf{Z}_p$, a tak y a x^2+1 jsou nulové. Avšak $x^2 + 1 = 0_{\mathbf{Z}_p}$ nemá pro dané p řešení v $\mathbf{Z}_p$. Vidíme, že pro takový polynom P neexistuje pro změnu vůbec žádné řešení.

Kritérium pro generování absolutně ireducibilních polynomů je popsáno v úloze 16. Viz rovněž lemma 117.

V 4.4.1 připomeneme charaktery Abelových grup a zavedeme Paleyho turnaje, o nichž pomocí Weilovy věty dokážeme, že mají kombinatorickou vlastnost zmíněnou v úvodu ke kapitole 4. V 4.4.2–4.4.4 elementární Stěpanovovou–Schmidtovou metodou dokážeme tvrzení 112. V 4.4.2 ho odvodíme z tvrzení 124, jež představuje základní myšlenku metody. Tvrdí, že existují polynomy, jejichž stupeň je vhodně omezen a které mají v každém bodě jisté množiny kořen dostatečně velké násobnosti. Tvrzení 124 dokážeme pomocí neurčitých koeficientů v 4.4.3, zůstanou nám však algebraické dluhy, které vyrovnáme v 4.4.4.

4.4.1 Paleyho turnaje

S pomocí Weilovy věty dokážeme kombinatorickou vlastnost Paleyho turnajů. Nejdříve však připomeneme několik pojmů.

Charakter χ konečné Abelovy grupy $(G,\cdot)$ je zobrazení $\chi : G \to \mathbf{C}$ takové, že (i) $\chi(xy)=\chi(x)\chi(y)$ pro všechny $x,y\in G$ a (ii) $|\chi(x)|=1$ pro všechny $x\in G$. Nejjednodušší je *hlavní charakter* χ_0: $\chi_0(x)=1$ pro všechny $x\in G$. Pro $e\in\mathbf{N}$ definujeme χ^e jako charakter $x\to\chi(x)^e$. Pokud $\chi^e=\chi_0$, řekneme, že χ má *exponent* e. Každý charakter χ má exponent $|G|$, protože $\chi(1_G)=1$ pro každé χ, a tak $\chi^{|G|}(x)=(\chi(x))^{|G|}=\chi(x^{|G|})=\chi(1_G)=1$ pro všechna $x\in G$. *Řád* d charakteru χ je jeho nejmenší exponent. Jediný charakter řádu 1 je χ_0. Řád χ dělí $|G|$ a exponenty χ jsou právě všechny přirozené násobky řádu. Jeden charakter grupy $(\mathbf{Z}_p^*,\cdot)$ už dobře známe. Je to Legendreův symbol

$$x \to \left(\frac{x}{p}\right) \in \{-1,1\}\ ,$$

který má řád 2. Nejdůležitější výsledek o charakterech je

Lemma 113. *Je-li χ charakter grupy $(G,\cdot)$,*

$$\sum_{x\in G}\chi(x)=\begin{cases} |G| & \text{pokud je } \chi \text{ hlavní a}\\ 0 & \text{jinak}\ .\end{cases}$$

DŮKAZ. Případ hlavního charakteru je jasný. Pro nehlavní charakter vezmeme $a\in G$ tak, že $\chi(a)\neq 1$. Protože

$$S=\sum_{x\in G}\chi(x)=\sum_{x\in G}\chi(ax)=\sum_{x\in G}\chi(a)\chi(x)=\chi(a)S\ ,$$

$(1-\chi(a))S=0$ a $S=0$. $\diamondsuit$

Turnaj T na konečné množině X, $|X|=n$, je množina $\binom{n}{2}$ *uspořádaných* dvojic prvků z X, která — odhlížíme-li od uspořádání v dvojici — obsahuje všech $\binom{n}{2}$ dvouprvkových podmnožin X. Pokud $(x,y)\in T$, řekneme, že (hráč) x *poráží* (hráče) y. Například v turnaji

$$T=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$$

1 poráží 2, 2 poráží 3 a 3 poráží 1.

Existuje pro každé $k \in \mathbf{N}$ takový turnaj, v němž se pro každých k hráčů najde jiný hráč, který je všechny poráží? Ukážeme, že tuto vlastnost má každý dostatečně velký *Paleyho turnaj* P_p na množině $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. Ten se pro prvočíslo p, $p \equiv 3 \bmod 4$, definuje pomocí Legendreova symbolu:

$$(x, y) \in P_p \iff \left(\frac{x-y}{p}\right) = 1 \ .$$

Protože -1 je kvadratický nezbytek modulo p, je definice korektní.

Věta 114 (Graham a Spencer, 1971). *Pro $p > 10k^6 4^k$ se v Paleyho turnaji P_p pro každých k hráčů najde jiný hráč, který je všechny poráží.*

Větu dokážeme pomocí výsledku o charakterech.

Tvrzení 115 (odhad charakteru). *χ buď charakter grupy $(\mathbf{Z}_p^*, \cdot)$ řádu $d > 1$ a $P \in \mathbf{Z}_p[X]$ buď polynom, který má stupeň $m, m \geq d$, a není tvaru cQ^d pro $c \in \mathbf{Z}_p$ a $Q \in \mathbf{Z}_p[X]$. Pak pro každé prvočíslo $p, p > 250m^5$, platí*

$$\left| \sum_{x \in \mathbf{Z}_p} \chi(P(x)) \right| < 3\sqrt{m^5} \cdot \sqrt{p} \ .$$

Důkaz věty 114. Nechť χ je Legendreův symbol modulo p, takže řád χ je 2, a $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ je k různých prvků ze $\mathbf{Z}_p$. Hledáme prvek $y \in \mathbf{Z}_p \backslash A$ takový, že $\chi(y - a_i) = 1$ pro $1 \leq i \leq k$. Nechť

$$g(A) = \sum_{y \in (\mathbf{Z}_p \backslash A)} \prod_{j=1}^{k} (1 + \chi(y - a_j)) \ .$$

Stačí zřejmě dokázat, že $g(A) > 0$.

Výraz $h(A)$ definujeme podobně jako $g(A)$, pouze vnější suma jde přes celé $\mathbf{Z}_p$. Po roznásobení vnitřního součinu dostáváme

$$\begin{aligned} h(A) &= \sum_{y \in \mathbf{Z}_p} 1 + \sum_{y \in \mathbf{Z}_p} \sum_{j=1}^{k} \chi(y - a_j) + \cdots \\ &\quad + \sum_{y \in \mathbf{Z}_p} \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \chi(y - a_{j_1}) \cdots \chi(y - a_{j_k}) \\ &= h_0(A) + h_1(A) + \cdots + h_k(A) \ . \end{aligned}$$

Patrně $h_0(A) = p$ a $h_1(A) = 0$ (lemma 113). Podle tvrzení 115 máme (pokud $p > 250k^5$) pro $h_s(A), s \geq 2$, odhad

$$\begin{aligned} |h_s(A)| &= \left| \sum_{j_1 < \cdots < j_s} \sum_{y \in \mathbf{Z}_p} \chi((y - a_{j_1}) \cdots (y - a_{j_s})) \right| \\ &< \binom{k}{s} \cdot 3\sqrt{s^5} \cdot \sqrt{p} \ . \end{aligned}$$

(V $h_s(A)$ jsme vyměnili pořadí sumace a použili multiplikativitu χ. Polynom $P(X) = (X - a_{j_1}) \cdots (X - a_{j_s})$ má stupeň s, $k \geq s \geq 2 = d$, a jistě se nerovná $cQ(X)^2$.)

Takže

$$|h(A) - p| < 3p^{1/2} \sum_{s=2}^{k} \binom{k}{s} s^{5/2} < 3k^3 2^k p^{1/2}$$

a

$$h(A) > p - 3k^3 2^k p^{1/2} \ .$$

Podle definice $g(A)$ a $h(A)$

$$g(A) = h(A) - \sum_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{k} (1 + \chi(a_i - a_j)) \ ,$$

a tak $g(A) \geq h(A) - k2^{k-1}$. Celkem

$$g(A) > p - 3k^3 2^k \sqrt{p} - k2^{k-1} \ .$$

Z $p > 10k^6 4^k$ a $k \geq 2$ ($10k^6 4^k \geq 250k^5$ pro $k > 1$) plyne, že $g(A) > 0$. Pro $k = 1$ věta platí triviálně. ♢

Zbývá dokázat tvrzení 115. Budeme k tomu potřebovat čtyři lemmata. Ve zbytku pododdílu F označuje $\mathbf{Z}_p = \mathrm{GF}(p)$.

Lemma 116. *Nechť $\theta \in F^*$ je primitivní element a χ je charakter grupy $(F^*, \cdot)$ řádu $d > 1$. Pak*

$$\sum_{k=0}^{d-1} \chi(\theta^k) = 0 \ .$$

Důkaz. χ je též (nikoli hlavní) charakter faktorgrupy $F^*/(F^*)^d$. Prvky $\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^{d-1}$ jsou reprezentanty d faktorových tříd. Dokazovaná rovnost je proto zvláštní případ lemmatu 113. ♢

Lemma 117. *Nechť $Y^d - P(X) \in K[X,Y]$, kde K je libovolné pole. Následující tři podmínky jsou vzájemně ekvivalentní.*

1. $Y^d - P(X)$ *je absolutně ireducibilní.*

2. $Y^d - cP(X)$ *je absolutně ireducibilní pro všechny nenulové $c \in K$.*

3. *Je-li $P(X) = a(X-x_1)^{d_1} \dots (X-x_s)^{d_s}$ faktorizace P v $\overline{K}[X]$ (kořeny x_i jsou vzájemně různé), pak $(d, d_1, \dots, d_s) = 1$.*

Důkaz. Nechť 2 neplatí a $Y^d - cP(X)$ se v $\overline{K}[X,Y]$ pro nějaké nenulové $c \in K$ rozkládá. Pak se tam ale rozkládá i $c((Y/c^{1/d})^d - P(X))$ a tedy i polynom $Y^d - P(X)$ (substituce $Y = c^{1/d}Y$) a 1 neplatí.

Nechť neplatí 3 a $t > 1$ dělí všechna čísla $d, d_1, \dots, d_s$. Označme d/t jako e a $(X-x_1)^{d_1/t} \dots (X-x_s)^{d_s/t}$ jako $Q(X)$. Pak máme faktorizaci

$$Y^d - (1/a)P(X) = (Y^e - Q(X))(Y^{e(t-1)} + Y^{e(t-2)}Q(X) + \dots + Q(X)^{t-1})$$

a 2 neplatí.

Nechť 1 neplatí a $Y^d - P(X)$ se v $\overline{K}[X,Y]$ rozkládá. Uvažme faktorizaci

$$Y^d - P(X) = (Y - \eta_1) \dots (Y - \eta_d) ,$$

kde η_i jsou prvky algebraického uzávěru pole $\overline{K}(X)$. Kořeny η_i můžeme vyjádřit ve tvaru $\eta_i = \zeta_i \eta$, kde η je fixovaný jeden z nich a $\zeta_1, \dots, \zeta_d$ jsou d-té odmocniny z 1_K v $\overline{K}$. Protože se $Y^d - P(X)$ rozkládá, existuje podmnožina $X \subset \{1, 2, \dots, d\}$, která má h prvků, $0 < h < d$, a

$$\prod_{i \in X} (Y - \zeta_i \eta) \in \overline{K}[X,Y] .$$

Absolutní člen tohoto součinu $\pm\eta^h(\prod_{i\in X} \zeta_i)$ leží v $\overline{K}[X]$, a tak $\eta^h \in \overline{K}[X]$. Nechť $l \in \mathbf{N}$ je nejmenší exponent takový, že $\eta^l \in \overline{K}(X)$. Pak každé $m \in \mathbf{N}$, pro něž $\eta^m \in \overline{K}(X)$, je násobek l. Protože $\eta^d = P(X) \in \overline{K}[X]$, $l \backslash d$. Nechť $\eta^l = H \in \overline{K}(X)$. Máme

$$H(X)^{d/l} = P(X) ,$$

a proto $H \in \overline{K}[X]$ a $t = d/l$ dělí každé $d_1, \dots, d_s$ a také d. Samozřejmě $t > 1$, protože $l \le h < d$. Tedy 3 neplatí. $\diamondsuit$

Lemma 118. *Nechť $d \in \mathbf{N}$, $d > 1$ a χ je charakter grupy $(F^*, \cdot)$ řádu d. Nechť $P \in F[X]$ má stupeň m, $Y^d - P(X)$ je absolutně ireducibilní a $m \geq d$. Pak pro $p > 250m^5$ platí*

$$\left| \sum_{x \in F} \chi(P(x)) \right| < 3\sqrt{m^5} \cdot \sqrt{p} \ .$$

Důkaz. Nechť $\theta \in F^*$ je primitivní element. Položíme

$$Z_k = \#\{x \in F : \ P(x) \in \theta^k (F^*)^d\} \ \text{ a } \ N_k = \#\{(x, y) \in F^2 : \ y^d = P(x)\theta^{-k}\} \ .$$

Takže

$$\sum_{x \in F} \chi(P(x)) = \sum_{k=0}^{d-1} Z_k \chi(\theta^k) \ .$$

Protože podle předešlého lemmatu je $Y^d - P(X)\theta^{-k}$ absolutně ireducibilní, můžeme použít tvrzení 112 a máme odhad $|N_k - p| < \sqrt{2m^5} \cdot \sqrt{p}$ (nyní používáme, že $m \geq d$). Nechť N_k' je počet těch z N_k řešení (x, y), v nichž $y \neq 0_F$. Pak $N_k - N_k' \leq m$, a tak $|N_k' - p| < 3\sqrt{m^5} \cdot \sqrt{p}$. Z_k vyjádříme jako $Z_k = p/d + R_k$ a uvědomíme si, že $Z_k = N_k'/d$. Tudíž

$$|R_k| < 3\sqrt{m^5/d^2} \cdot \sqrt{p} \ .$$

Vyjádření součtu hodnot $\chi(P(x))$ pomocí Z_k a lemma 116 dávají

$$\begin{aligned} \left| \sum_{x \in F} \chi(P(x)) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{d-1} \left(\frac{p}{d} + R_k \right) \chi(\theta^k) \right| = \left| \sum_{k=0}^{d-1} R_k \chi(\theta^k) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{d-1} |R_k| < 3\sqrt{m^5} \cdot \sqrt{p} \ . \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Lemma 119. *Nechť*

$$P(X) = c(X - x_1)^{e_1} \dots (X - x_s)^{e_s} \ ,$$

kde $P \in F[X]$, $c \in F$, $e_i \in \mathbf{N}$ a $x_i \in \overline{F}$. Nechť dále $d \in \mathbf{N}$ dělí všechna e_i a $p \perp d$. Pak

$$P(X) = cK(X)^d \ ,$$

kde $K \in F[X]$.

Důkaz. Dokážeme, že $K(X) = (X - x_1)^{e_1/d} \dots (X - x_s)^{e_s/d}$ padne do $F[X]$. Nechť $K(X) = X^u + c_1 X^{u-1} + \dots + c_u$. Víme, že $K(X)^d \in F[X]$. Koeficient X^{du-i} v $K(X)^d$ je $d_F c_i$ plus polynom z $F[c_1, \dots, c_{i-1}]$ (pro $i = 1$ je tento polynom nulový). Protože $d_F \neq 0_F$, indukcí podle i plyne, že $c_i \in F$. $\diamondsuit$

Důkaz tvrzení 115. Pišme $P(X) = c(X - x_1)^{e_1}(X - x_2)^{e_2} \dots (X - x_s)^{e_s}$, kde $c \in F$ a x_i jsou vzájemně různé prvky $\overline{F}$. Podle předpokladu je číslo $e = (e_1, \dots, e_s, d)$ vlastním dělitelem d. Takže $P(X) = cK(X)^e$, kde $K(X) = (X - x_1)^{e_1/e} \dots (X - x_s)^{e_s/e}$. Podle předchozího lemmatu s e v roli d (předpoklad je splněn, $e < d \leq m < p$) platí, že $K \in F[X]$. Protože $(e_1/e, \dots, e_s/e, d/e) = 1$, podle lemmatu 117 je

$$Y^{d/e} - K(X)$$

absolutně ireducibilní. K má stupeň m/e a χ^e má řád $d/e, m/e \geq d/e > 1$. Podle lemmatu 118

$$\begin{aligned} \left| \sum_{x \in F} \chi(P(x)) \right| &= \left| \chi(c) \sum_{x \in F} \chi^e(K(x)) \right| \\ &< 3\sqrt{(m/e)^5} \cdot \sqrt{p} \\ &\leq 3\sqrt{m^5} \cdot \sqrt{p} \ . \end{aligned}$$

4.4.2 První část důkazu

Nyní přejdeme k důkazu tvrzení 112. V celém důkazu $F = \mathbf{Z}_p$, kde $\mathbf{Z}_p$ je konečné pole zbytků modulo p, a $P(X, Y) \in F[X, Y]$ je absolutně ireducibilní polynom stupně $d \geq 2$ (pro $d = 1$ věta triviálně platí). Řekneme, že P je *redukovaný*, pokud (i) Y^d má koeficient 1_F, to jest

$$P(X, Y) = Y^d + G_1(X)Y^{d-1} + G_2(X)Y^{d-2} + \dots + G_d(X) \ ,$$

kde $G_i(X) \in F[X]$ a má stupeň nejvýše i, a (ii) P není polynomem v X a Y^p, to jest P má monom aX^iY^j, kde $a \neq 0_F$ a p nedělí j. Vlastnosti (ii) se říká *separovanost* P vzhledem k Y.

Tvrzení 120 (redukce P). *Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že polynom P je redukovaný.*

Důkaz. Nechť $P(X,Y)$ je výchozí polynom. Pokud $P(X,Y) = Q(X,Y^p)$, můžeme P nahradit polynomem Q, protože v F platí $y^p = y$ a počet řešení rovnice se tedy nezmění. To opakujeme tak dlouho, až dostaneme polynom $P(X,Y)$ separovaný v Y. Nechť $P = \sum_{i,j} a_{ij}X^iY^j$ a $\deg(P) = d$. Abychom dosáhli vlastnost (i), zavedeme substituci

$$Q(X,Y) = P(X + CY, Y) = \sum_{i,j} A_{ij}(C)X^iY^j \ .$$

Polynomy $A_{ij}(C) \in F[C]$ mají stupeň nejvýše d. Separovanost již máme, tudíž existuje koeficient $a_{i_0j_0} \neq 0_F$ s j_0 nedělitelným p. Platí

$$A_{i_0j_0}(0_F) = a_{i_0j_0} \quad \text{a} \quad A_{0d}(C) = P_d(C, 1_F) \ ,$$

kde $P_d(X,Y)$ sestává z monomů P se stupněm d. Polynomy $A_{i_0j_0}(C)$ a $A_{0d}(C)$ nejsou identicky nulové. Podle předpokladů tvrzení 112 $|F| = p > 2d$, můžeme tedy zvolit $c \in F$ tak, že $A_{i_0j_0}(c) \neq 0_F$ a $A_{0d}(c) \neq 0_F$. Polynom $P(X,Y)$ pak nahradíme $Q(X,Y) = P(X + cY, Y)/A_{0d}(c)$. Polynom $Q(X,Y)$ stupně d má vlastnosti (i) a (ii), zůstává absolutně ireducibilní a rovnice $Q(X,Y) = 0_F$ má v F stejný počet řešení jako $P(X,Y) = 0_F$. $\diamondsuit$

V dalším je proto $P(X,Y) \in F[X,Y]$ redukovaný absolutně ireducibilní polynom stupně $d \geq 2$.

P je ireducibilní i v $F(X)[Y]$. To plyne ze zobecnění tvrzení 12: P je ireducibilní v $F[X][Y]$ a $F(X)$ je podílové pole okruhu $F[X]$ s jednoznačným rozkladem na ireducibilní prvky. P jako prvek $F(X)[Y]$ je tedy minimální polynom každého svého kořene $\delta \in \overline{F(X)}$. Tyto kořeny jsou navíc jednoduché, protože derivace P podle Y není identicky nulová. (P je redukovaný; v polích nenulové charakteristiky je třeba být opatrný.)

Operátor derivování v $F[X]$ označujeme pomocí D: $D(a_tX^t + a_{t-1}X^{t-1} + \cdots + a_1X + a_0) = t_Fa_tX^{t-1} + (t-1)_Fa_{t-1}X^{t-2} + \cdots + a_1$.

Tvrzení 121 (o derivaci). *Nechť $A(X) \in F[X]$ ($F = \mathbf{Z}_p$, ale tvrzení platí pro každé pole charakteristiky p) a $m \in \mathbf{N}$ splňuje $m \leq p$. Když pro nějaké $x \in F$ platí*

$$(D^{m-1}A)(x) = (D^{m-2}A)(x) = \cdots = (DA)(x) = A(x) = 0_F \ ,$$

dělí $(X - x)^m$ polynom $A(X)$. Jinými slovy, $A(X)$ má v x kořen násobnosti alespoň m.

DŮKAZ. Vyjádříme-li polynom A jako $A(X) = c_t(X-x)^t+\cdots+c_1(X-x)+c_0$, dostáváme

$$D^l A = l!_F \cdot \left(\binom{t}{l}_F c_t(X-x)^{t-l} + \cdots + \binom{l+1}{l}_F c_{l+1}(X-x) + c_l \right).$$

Pro $X = x$ a $0 \leq l < m$ dostáváme $0_F = l!_F \cdot c_l$. Avšak $l < p$, a tak $l!_F \neq 0_F$ a $c_l = 0_F$. Takže $c_0 = c_1 = \cdots = c_{m-1} = 0_F$ a $(X-x)^m$ dělí $A(X)$. $\diamondsuit$

Podmínka $m \leq p$ je podstatná. Například $A(X) = X^p$ má všechny derivace identicky nulové, ale v 0_F má kořen násobnosti pouze p. Pro $m > p$ proto tvrzení obecně neplatí. To je jediná, avšak nezanedbatelná potíž, kterou nutno překonat při přechodu od $F = \mathbf{Z}_p$ k obecnému poli $F = \mathrm{GF}(p^r)$.

Tvrzení 122 (diskriminant). *$G = F(A_0,\ldots,A_d)$ buď pole racionálních funkcí v neznámých $A_0,\ldots,A_d$ a polynom $Q(Y) = A_0Y^d+A_1Y^{d-1}+\cdots+A_d \in G[Y]$ měj kořeny $y_i \in \overline{G}$:*

$$Q(Y) = A_0(Y-y_1)(Y-y_2)\cdots(Y-y_d)\ .$$

Pak

$$\Delta = A_0^{2d-2} \prod_{1\leq i<j\leq d} (y_i - y_j)^2$$

je polynom z $F[A_0,\ldots,A_d]$, který je nenulový, právě když Q má pouze jednoduché kořeny. Je-li nenulový, má stupeň $2d-2$ a jeho každý monom $aA_0^{i_0}\ldots A_d^{i_d}$ splňuje $i_1+2i_2+\cdots+di_d = d(d-1)$. Polynomu Δ se říká diskriminant Q.

DŮKAZ. Polynom $\prod(y_i-y_j)^2$ je symetrický v y_i. Podle tvrzení 13 v kapitole 1 je proto polynomem v elementárních symetrických funkcích $e_i(y_1,\ldots,y_d)$ a tedy polynomem z $F[A_1/A_0,\ldots,A_d/A_0]$ stupně $2(d-1)$ (y_i má v $\prod(y_i-y_j)^2$ stupeň $2(d-1)$). Takže $\Delta \in F[A_0,\ldots,A_d]$ a má stupeň $2(d-1)$. Poslední část tvrzení plyne z poslední části tvrzení 13. $\diamondsuit$

Nechť $\Delta(X) \in F[X]$ je diskriminant polynomu $P(X,Y) \in F(X)[Y]$ vzhledem k Y. Protože $\deg(G_i) \leq i$ (G_i je koeficient Y^{d-i} v P), poslední část tvrzení 122 implikuje $\deg(\Delta) \leq d(d-1)$. Pokud $\Delta(x) \neq 0_F$, kde $x \in F$, má $P(x,Y)$ d různých kořenů $y_1,\ldots,y_d \in \overline{F}$. Definujeme množinu

$$I = \{x \in F :\ \Delta(x) \neq 0_F\}$$

a pro $x \in I$ množiny

$$J_1(x) = \{y_i : \ y_i \in F\} \ \text{ a } \ J_2(x) = \{y_i : \ y_i \in \overline{F} \setminus F\} \ .$$

Je jasné, že pro každé $x \in I$ platí $|J_1(x)| + |J_2(x)| = d$. Počet řešení N rovnice $P(X,Y) = 0_F$ v F splňuje

$$N = \sum_{x \in I} |J_1(x)| + N' \ ,$$

kde N' je počet těch řešení (x,y), pro něž $\Delta(x) = 0_F$. Zřejmě $N' \leq d \cdot \deg(\Delta) \leq d^2(d-1)$, a tak stačí odhadnout pouze sumu.

Definujeme polynomy

$$\begin{aligned} E_1(X,Y,Y') &= Y - Y' \ \text{ a} \\ E_2(X,Y,Y') &= \sum_{j=1}^{d} G_{d-j}(X)(Y^{j-1} + Y^{j-2}Y' + \cdots + (Y')^{j-1}) \ , \end{aligned}$$

kde $G_j(X)$ jsou koeficienty Y v $P(X,Y)$. Položíme $e_i = \deg(E_i)$, takže $e_1 = 1$ a $e_2 = d - 1$. (Nehrozí záměna se symetrickými polynomy.)

Lemma 123. *Pro $i = 1, 2$ a $x \in I$ platí*

$$J_i(x) = \{y \in \overline{F} : \ E_i(x, y, y^p) = 0_F\} \ .$$

Důkaz. Máme faktorizaci

$$P(X,Y) - P(X,Y') = E_1(X,Y,Y') \cdot E_2(X,Y,Y') \ .$$

Pro $x \in I$ a $y \in J_1(x) \cup J_2(x)$ platí rovnosti $0_F = P(x,y) = P(x,y)^p = P(x,y^p)$, protože $u = u^p$ v F (ale ne v $\overline{F} \setminus F$) a $(u+v)^p = u^p + v^p$ pro všechna $u, v \in \overline{F}$. Tudíž

$$0_F = P(x,y) - P(x,y^p) = E_1(x,y,y^p) \cdot E_2(x,y,y^p) \ .$$

Pokud $y \in J_1(x)$, máme $y \in F$ a $y = y^p$. Takže $E_1(x,y,y^p) = 0_F$. Ovšem $E_2(x,y,y^p) = E_2(x,y,y) \neq 0_F$, protože y je jednoduchý kořen $P(x,Y)$ a $E_2(x,y,y) = P_Y(x,y)$ (derivace P podle Y). Pokud $y \in J_2(x)$, máme $y \in \overline{F} \setminus F$ a $y \neq y^p$. Takže $E_1(x,y,y^p) \neq 0_F$. V důsledku hořejší rovnosti však $E_2(x,y,y^p) = 0_F$. $\diamondsuit$

Dospíváme k výsledku, na němž je elementární důkaz tvrzení 112 založen. Dokážeme ho v příštím pododdílu.

Tvrzení 124 (klíčové). *Nechť* $i = 1, 2$ *a číslo* $m \in \mathbf{N}$ *je takové, že*

$$d \backslash m,\ \ m \geq d^2 \ \text{ a } 2(d-1)(m+8)^2 \leq p\ .$$

Pak existuje nenulový polynom $R_i(X) \in F[X]$ *takový, že*

1. $(D^l R_i)(x) = 0_F$ *pro každé* $x \in I$ *a* $0 \leq l < m|J_i(x)|$.

2. $\deg(R_i) \leq e_i pm + pd(d-1)$. *(*$e_1 = 1$ *a* $e_2 = d-1$ *jsou stupně* E_i*.)*

Důkaz tvrzení 112. **(Stěpanov, 1969–74; Schmidt, 1973.)** Veličiny $\Delta(X)$, I a $J_i(x)$ buďte jako výše a m a $R_i(X)$ jako v posledním tvrzení. Pro každé $x \in I$ a $i = 1, 2$ platí

$$m|J_i(x)| \leq md < p\ .$$

Pro polynomy $R_i(X)$ tedy můžeme použít tvrzení 121.

Položíme, pro $i = 1$ a 2,

$$N_i = \sum_{x \in I} |J_i(x)|\ .$$

Protože $p - d(d-1) \leq |I| \leq p$ (neboť $\deg(\Delta) \leq d(d-1)$), máme nerovnosti

$$d(p - d(d-1)) \leq N_1 + N_2 \leq dp\ .$$

Počet kořenů polynomu $R_i(X)$ v F, včetně násobností, nepřesahuje jeho stupeň. Podle 1 tvrzení 124 a tvrzení 121 má $R_i(X)$ v každém $x \in I$ alespoň $m|J_i(x)|$-násobný kořen. Tedy $mN_i \leq \deg(R_i)$. Podle 2 tvrzení 124

$$N_i \leq \frac{\deg(R_i)}{m} \leq e_i p + \frac{pd(d-1)}{m}\ .$$

N_1 je počet těch z N řešení $(x, y) \in F^2$ rovnice $P(X, Y) = 0_F$, pro něž $\Delta(x) \neq 0_F$. Díky $\deg(\Delta) \leq d(d-1)$ a poslednímu odhadu máme

$$N \leq N_1 + d^2(d-1) < p + \frac{pd(d-1)}{m} + d^3\ .$$

Z druhé strany, podle dolního odhadu $N_1 + N_2$ a horního odhadu N_2,

$$\begin{aligned} N \geq N_1 &> pd - d^3 - N_2 \\ &\geq pd - d^3 - (d-1)p - \frac{pd(d-1)}{m} \\ &= p - \frac{pd(d-1)}{m} - d^3\ . \end{aligned}$$

Pro každé $m \in \mathbf{N}$ splňující podmínky tvrzení 124 máme odhad

$$|N - p| < \frac{pd(d-1)}{m} + d^3 .$$

Číslo m zvolíme jako násobek d v rozmezí

$$\sqrt{p/(2d)} - 5d < m \leq \sqrt{p/(2d)} - 4d .$$

Pak $(m+8)^2 \leq p/(2d)$ a požadovaná nerovnost $2(d-1)(m+8)^2 \leq p$ je splněna. Rovněž platí, vzhledem k $p > 250d^5$,

$$m > \left(\frac{p}{2d}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{5 \cdot 2^{1/2} \cdot d^{3/2}}{p^{1/2}}\right) > \frac{1}{2} \left(\frac{p}{2d}\right)^{1/2} > d^2 .$$

Jaký odhad nám toto m dá? Z $p > 250d^5$ plyne ještě i

$$\frac{5 \cdot 2^{1/2} \cdot d^{3/2}}{p^{1/2}} < \frac{1}{3} .$$

Pro všechna reálná x v intervalu $0 < x < 1/3$ platí $1/(1-x) < 1 + 3x/2$. Takže

$$\frac{1}{m} < \left(\frac{2d}{p}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{5 \cdot 2^{1/2} \cdot d^{3/2}}{p^{1/2}}\right) .$$

Po dosazení do horního odhadu $|N - p|$ máme

$$\begin{aligned} |N - p| &< 2^{1/2} d(d-1) d^{1/2} p^{1/2} \left(1 + \frac{8 \cdot 2^{1/2} \cdot d^{3/2}}{p^{1/2}}\right) + d^3 \\ &< 2^{1/2} d^{5/2} p^{1/2} - 2^{1/2} d^{3/2} p^{1/2} + 16d^4 + d^3 \\ &< 2^{1/2} d^{5/2} p^{1/2} . \end{aligned}$$

Tím je speciální případ Weilovy věty dokázán.

4.4.3 Druhá část důkazu

Zbývá však dokázat tvrzení 124. K tomu budeme potřebovat několik lemmat. Připomínáme, že $F = \mathbf{Z}_p$. Polynom $P(X, Y) = Y^d + G_1(X) Y^{d-1} + \cdots + G_d(X) \in F[X, Y]$ stupně d v Y je absolutně ireducibilní a separovaný v Y, $\deg(G_i) \leq i$ a $\delta \in \overline{F(X)}$ je jeho kořen, $P(X, \delta) \equiv 0$. Místo $P(X, \delta) = 0_{\overline{F(X)}}$ a podobně budeme v případě funkcionálních polí psát $\ldots \equiv 0$.

Lemma 125. *$P(X,Y)$ a $\delta \in \overline{F(X)}$ jsou jako výše. Pokud $A \in F[X,Y,Z,W]$ je nenulový polynom, jehož stupně splňují $\deg_X(A) \leq p/d - d$, $\deg_Y(A) \leq d-1$ a $\deg_W(A) \leq d-1$, potom*

$$A(X,\delta,X^p,\delta^p) \not\equiv 0 \ .$$

Důkaz tohoto lemmatu odsouváme do příštího pododdílu.

Protože P je separovaný v Y, dá se operátor derivace D rozšířit z $F(X)$ na $F(X,\delta)$. Má platit (proměnné, podle nichž se derivuje, klademe do indexu)

$$0 \equiv D(P(X,\delta)) = P_X(X,\delta) + P_Y(X,\delta)\cdot(D\delta) \ .$$

Odtud

$$D\delta = -\frac{P_X(X,\delta)}{P_Y(X,\delta)}$$

a D rozšíříme na $F(X,\delta)$ zřejmým způsobem.

Lemma 126. *Polynom $P(X,Y)$ je jako výše (zejména je P separovaný v Y) a $\delta \in \overline{F(X)}$ je jeho kořen. Nechť $m,l \in \mathbf{N}_0$, $0 \leq l < m$ a $A \in F[X,Y]$. Pak*

$$D^l(P_Y^{2m}(X,\delta)\cdot A(X,\delta)) = P_Y^{2m-l}(X,\delta)\cdot A^{(l)}(X,\delta) \ ,$$

kde $A^{(l)} \in F[X,Y]$ a má stupeň nejvýše $\deg(A) + (2d-3)l$.

Důkaz. Indukce podle l. Pro $l=0$ lemma platí. Z předpokladu platnosti pro l odvodíme platnost pro $l+1$. Pro přehlednost zápisu pomíjíme argument (X,δ).

$$\begin{aligned}&D^{l+1}(P_Y^{2m}(X,\delta)\cdot A(X,\delta)) = D(P_Y^{2m-2l}(X,\delta)\cdot A^{(l)}(X,\delta))\\ &= (2m-2l)P_Y^{2m-2l-1}\cdot(P_{YX}+P_{YY}D\delta)\cdot A^{(l)} + P_Y^{2m-2l}\cdot(A_X^{(l)}+A_Y^{(l)}D\delta).\end{aligned}$$

Dosadíme vyjádření pro $D\delta$ a dostaneme

$$\begin{aligned}&P_Y^{2m-2(l+1)}\cdot[(2m-2l)\cdot(P_{YX}P_Y - P_{YY}P_X)\cdot A^{(l)} + A_X^{(l)}P_Y^2 - A_Y^{(l)}P_XP_Y]\\ &= P_Y^{2m-2(l+1)}\cdot A^{(l+1)}.\end{aligned}$$

Zřejmě $\deg(A^{(l+1)}) \leq \deg(A^{(l)}) + (2d-3)$. Odtud plyne uvedený odhad stupně polynomu $A^{(l)}$. $\diamondsuit$

Lemma 127. *Nechť*

$$P(X,Y) = Y^d + G_1(X)Y^{d-1} + \cdots + G_d(X) = (y-\delta_1)(y-\delta_2)\ldots(y-\delta_d) \ ,$$

kde $\deg(G_i) \leq i$ *a* $\delta_i \in \overline{F(X)}$. *Je-li* $A \in F[X, Y_1, \ldots, Y_d]$ *polynom symetrický v* $Y_1, \ldots, Y_d$*, pak*

$$A(X, \delta_1, \ldots, \delta_d) = B(X) \ ,$$

kde $B \in F[X]$ *a* $\deg(B) \leq \deg(A)$.

Důkaz. Stupeň polynomu A označíme jako s. Pak

$$A(X, Y_1, \ldots, Y_d) = \sum_{v=0}^{s} X^v \cdot C_v(Y_1, \ldots, Y_d) \ ,$$

kde $\deg(C_v) \leq s - v$ a C_v je symetrický v $Y_1, \ldots, Y_d$. Podle tvrzení 13 v kapitole 1

$$C_v(Y_1, \ldots, Y_d) = H_v(e_1, \ldots, e_d) \ ,$$

kde $H_v \in F[S_1, \ldots, S_d]$ a $e_i \in F[Y_1, \ldots, Y_d]$ jsou elementární symetrické polynomy. Podle téhož tvrzení každý monom $S_1^{i_1} S_2^{i_2} \ldots S_d^{i_d}$ polynomu H_v splňuje nerovnost $i_1 + 2i_2 + \cdots + di_d \leq s - v$. Takže v

$$C_v(\delta_1, \ldots, \delta_d) = H_v(-G_1(X), \ldots, (-1)^d G_d(X))$$

má každý monom $G_1(X)^{i_1} G_2(X)^{i_2} \ldots G_d(X)^{i_d}$ stupeň v X nejvýše $i_1 + 2i_2 + \cdots + di_d \leq s - v$. Každý sčítanec $X^v \cdot C_v(\delta_1, \ldots, \delta_d)$ ve vyjádření $A(X, \delta_1, \ldots, \delta_d)$ je polynom stupně nejvýše $v + s - v = s$. $\diamondsuit$

Lemma 128. *Nechť* $i = 1, 2$ *a číslo* $m \in \mathbf{N}$ *je takové, že*

$$d \backslash m, \ m \geq d^2 \ a \ 2(d-1)(m+8)^2 \leq p \ .$$

$P(X,Y) \in F[X,Y]$ *a* $\delta \in \overline{F(X)}$ *jsou jako výše. Pak existuje polynom* $A = A_i \in F[X,Y]$ *takový, že*

1. $A(X, \delta) \not\equiv 0$.

2. $A^{(l)}(x,y) = 0_{\overline{F}}$ *pro všechny* $x \in I, y \in J_i(x)$ *a* $0 \leq l < m$ *(polynom* $A^{(l)}$ *je definován v lemmatu 126,* I *a* $J_i(x)$ *v předešlém pododdílu.)*

3. $\deg(A) \leq e_i pm/d + p(d-3/2)$. *(Čísla e_i jsou definována v předešlém pododdílu.)*

Důkaz. Polynom A hledáme ve tvaru

$$A(X,Y) = \sum_{j=0}^{K} \sum_{k=0}^{d-1} \langle j+k \leq K \rangle \cdot B_{j,k}(X,Y) \cdot X^{pj} Y^{pk} \ ,$$

kde $K = e_i m/d + d - 2$ a

$$B_{j,k}(X,Y) = \sum_{i=0}^{d-1} A_{i,j,k}(X) \cdot Y^i \ ,$$

přičemž $\deg(A_{i,j,k}) \leq p/d - d - i - j - k$. Tudíž

$$\begin{aligned} \deg(A) &\leq Kp + p/d \\ &= e_i pm/d + p(d - 2 + 1/d) \\ &\leq e_i pm/d + p(d - 3/2) \end{aligned}$$

a A má požadovaný stupeň. Nejsou-li všechny polynomy $A_{i,j,k}$ nulové, vyplývá pomocí lemmatu 125, že $A(X,\delta) \not\equiv 0$. Tím jsou dosaženy vlastnosti 1 a 3. Zbývá dokázat, že lze zvolit ne všechny nulové $A_{i,j,k}$ tak, že platí 2.

Derivace X^p a δ^p jsou identicky nulové. Proto

$$A^{(l)}(X,Y) = \sum_{j=0}^{K} \sum_{k=0}^{d-1} \langle j+k \leq K \rangle \cdot B^{(l)}_{j,k}(X,Y) \cdot X^{pj} Y^{pk} \ ,$$

kde, podle lemmatu 126,

$$\deg(B^{(l)}_{j,k}) \leq \deg(B_{j,k}) + (2d-3)l \leq p/d - d - j - k + (2d-3)l \ .$$

Potřebujeme, aby pro $0 \leq l < m$, $x \in I$ a $y \in J_i(x)$ nastalo $A^{(l)}(x,y) = 0_{\overline{F}}$.

První případ je $i = 1$. Nyní $x, y \in F$ a tedy $x^p = x$ a $y^p = y$. Potřebujeme, aby se polynom

$$C^{(l)}(X,Y) = \sum_{j=0}^{K} \sum_{k=0}^{d-1} \langle j+k \leq K \rangle \cdot B^{(l)}_{j,k}(X,Y) \cdot X^{j} Y^{k}$$

anuloval na $x \in I, y \in J_1(x)$. Povšimněme si, že

$$\deg(C^{(l)}) \leq p/d + (2d-3)l - 2 \ .$$

Druhý případ je $i = 2$. Nyní $x \in F$ a $y \in \overline{F} \backslash F$. Takže $x^p = x$, $y^p \neq y$ a, podle lemmatu 123,

$$0_{\overline{F}} = E_2(x, y, y^p) = \sum_{i=1}^{d} G_{d-i}(x) \cdot (y^{i-1} + y^{i-2}y^p + y^{i-3}y^{2p} + \cdots + y^{p(i-1)}) \ .$$

Dosadíme v $A^{(l)}(X, Y)$ x za X a y za Y. Protože $G_0 = 1_F$, lze pomocí poslední rovnice vyjádřit $y^{p(d-1)}$ pomocí $1, y^p, y^{2p}, \ldots, y^{p(d-2)}$ a koeficientů, které jsou polynomy z $F[x, y]$ stupně nejvýše $d - 1$. Pro $i = 2$ tedy $A^{(l)}$ přechází na polynom $C^{(l)}(X, Y, Z)$, kde Z odpovídá mocninám y^p a za Z^{d-1} jsme dosadili zmíněné vyjádření. Tedy $\deg_Z(C^{(l)}) \leq d-2$. Monomy $A^{(l)}$ přispívají do X, Y-stupně $C^{(l)}$ nejvýše $p/d - d - j - k + (2d - 3)l + j \leq p/d + (2d - 3)l - 2$ pro $k < d - 1$ a $p/d - d - j - k + (2d - 3)l + j + (d - 1) \leq p/d + (2d - 3)l - 2$ pro $k = d-1$. Takže $\deg_{X,Y}(C^{(l)}) \leq p/d+(2d-3)l-2$. Chceme $C^{(l)}(x, y, y^p) = 0_{\overline{F}}$ pro všechny $x \in I$ a $y \in J_2(x)$.

V obou případech potřebujeme, aby se $C^{(l)}(X, Y, Z)$ anuloval na x, y, y^p, $x \in I$, $y \in J_i(x)$, přičemž

$$\deg_{X,Y}(C^{(l)}) \leq p/d+(2d-3)l-2 \quad \text{a} \quad \deg_Z(C^{(l)}) \leq e_i-1 \quad (e_1 = 1, e_2 = d-1) \ .$$

Indukcí se lehce dokáže, že pro dvojice (x, y) splňující $P(x, y) = 0_{\overline{F}}$ a $t \in \mathbf{N}_0$ máme vyjádření

$$y^{d-1+t} = G_1^{(t)}(x)y^{d-1} + \cdots + G_d^{(t)}(x) \ ,$$

kde $\deg(G_i^{(t)}) \leq t+i-1$ a $G_i^{(0)}(X) = G_i(X)$. Díky této redukci $C^{(l)}(x, y, y^p) = 0_{\overline{F}}$, právě když $D^{(l)}(x, y, y^p) = 0_{\overline{F}}$, kde polynom $D^{(l)}$ splňuje

$$\begin{aligned} \deg_X(D^{(l)}) &\leq p/d + (2d - 3)l - 2 \\ \deg_Y(D^{(l)}) &\leq d - 1 \\ \deg_Z(D^{(l)}) &\leq e_i - 1 \ . \end{aligned}$$

Požadavek 2 v lemmatu je tedy splněn, je-li polynom $D^{(l)}(X, Y, Z)$ identicky nulový pro všechny $0 \leq l < m$.

Počet koeficientů polynomu $D^{(l)}$ je nejvýše

$$e_i d(p/d + (2d - 3)l - 1) < e_i p + (2d^2 - 3d)e_i l \ .$$

Počet b koeficientů všech polynomů $D^{(l)}(X, Y, Z), 0 \leq l < m$, tak splňuje, vzhledem k $1 + 2 + \cdots + (m - 1) < m^2/2$,

$$b < e_i pm + \tfrac{1}{2} e_i m^2(2d^2 - 3d) \ .$$

Tyto neznámé koeficienty jsou lineárními kombinacemi dosud neurčených koeficientů polynomů $A_{i,j,k}(X)$. Dostáváme homogení lineární soustavu pro $A_{i,j,k}$-koeficienty.

Počet koeficientů jednoho polynomu $A_{i,j,k}$ je alespoň

$$p/d - d - i - j - k \geq p/d - d - 2(d-1) - j \geq p/d - 3d - j \ .$$

Sečtením přes j v oboru $0 \leq j \leq K - k$ získáme dolní odhad

$$(p/d - 3d)(K+1) - (K-k)(K-k+1)/2 - pk/d \ .$$

Sečtení přes k probíhající $0, 1, \ldots, d-1$ dá dolní odhad

$$(p - 3d^2)(K+1) - K^2 d/2 - (p/d)d(d-1)/2 \ .$$

Konečně sečtením přes i probíhající $0, 1, \ldots, d-1$ získáme celkový dolní odhad a pro počet všech neznámých koeficientů ve všech $A_{i,j,k}(X)$. Totiž

$$\begin{aligned} a &> (p - 3d^2)(Kd + d) - pd(d-1)/2 - K^2 d^2/2 \\ &> (p - 3d^2)(e_i m + d^2 - d) - pd(d-1)/2 - (e_i m + d^2)^2/2 \\ &> e_i pm + p(d^2 - d)/2 - e_i^2 m^2/2 - 6 e_i m d^2 - 2 e_i m d^2 \ , \end{aligned}$$

protože, podle předpokladu, $m \geq d^2$.

Pokud $b < a$, má soustava b homogeních lineárních rovnic o alespoň a neznámých netriviální řešení a polynomy $D^{(l)}(X, Y, Z)$ jsou identicky nulové. To nastane, je-li horní odhad čísla b menší než dolní odhad čísla a, tedy pro

$$e_i m^2 (2d^2 - 3d + e_i)/2 + 8 e_i m d^2 < pd(d-1)/2 \ .$$

Protože $e_i = 1$ nebo $d - 1$, tato nerovnost jistě platí, pokud platí nerovnost

$$m^2(d-1)(2d^2 - 2d - 1)/2 + 8md^2(d-1) < pd(d-1)/2 \ .$$

Ta platí, pokud $m^2(d-1) + 8md < p/2$. A to je splněno díky $d \geq 2$ a předpokladu $2(d-1)(m+8)^2 \leq p$. Tím je důkaz lemmatu dokončen. $\diamondsuit$

Důkaz tvrzení 124. Položíme

$$C(X, Y) = P_Y^{2m}(X, Y) \cdot A(X, Y) \ ,$$

kde $A = A_i \in F[X,Y]$ je polynom z lemmatu 128. Pak $C(X,\delta) \not\equiv 0$, protože $P_Y(X,\delta) \not\equiv 0$ (P je ireducibilní v $F(X)[Y]$, tudíž je δ jednoduchý kořen P) a $A(X,\delta) \not\equiv 0$ podle 1 lemmatu 128. Pro $0 \le l < m$ platí

$$D^l C(X,\delta) = P_Y^{2m-2l}(X,\delta) \cdot A^{(l)}(X,\delta) \ .$$

(Polynom $A^{(l)}$ je definován v lemmatu 126.) Takže, podle 2 lemmatu 128, pro $x \in I$ a $y \in J_i(x)$ máme $(D^l C(X,\delta))(x,y) = 0_{\overline{F}}$. Dále

$$\deg(C) \le e_i pm/d + p(d-3/2) + 2md \ .$$

Ale z $p > 250d^5$ a $p \ge 2(d-1)(m+8)^2$ plyne, že $2md < 2d\sqrt{p} = 2dp/\sqrt{p} < p/2$, a tak

$$\deg(C) \le e_i pm/d + p(d-1) \ .$$

Hledaný polynom bude

$$R_i(X) = \prod_{j=1}^{d} C(X,\delta_j) \ ,$$

kde $P(X,Y) = (X-\delta_1)(X-\delta_2)\ldots(X-\delta_d)$. Místo $R_i(X)$, kde $i = 1$ nebo 2, budeme psát jen $R(X)$. Nechť nyní $0 \le l < m|J_i(X)|$. Pravá strana rovnice

$$D^l R(X) = \sum_{u_1+\cdots+u_d=l} \binom{l}{u_1,\ldots,u_d}_F D^{u_1}C(X,\delta_1)\cdot\ldots\cdot D^{u_d}C(X,\delta_d)$$

je polynom symetrický v $\delta_1,\ldots,\delta_d$. Podle tvrzení 13 máme vyjádření $D^l R(X) = K(X, G_1(X),\ldots,G_d(X))$, kde $K \in F[X,Y_1,\ldots,Y_d]$. Pro $x \in F$ máme $(D^l R)(x) = K(x, G_1(x),\ldots,G_d(x))$. Pro $x \in I$ má $P(x,Y)$ d různých kořenů $y_1,\ldots,y_d$. Specializace $X,\delta_1,\ldots,\delta_d \to x,y_1,\ldots,y_d$ dává

$$D^l R(x) = \sum_{u_1+\cdots+u_d=l} \binom{l}{u_1,\ldots,u_d}_F D^{u_1}C(x,y_1)\cdot\ldots\cdot D^{u_d}C(x,y_d) \ .$$

($D^u C(x,y)$ je $(D^u C(X,\delta))(x,y)$, nikoli $(D^u C(X,Y))(x,y)$.)

Víme, že $\{y_1,y_2,\ldots,y_d\} = J_1(x) \cup J_2(x)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $|J_i(x)| = t$ a $y_1,y_2,\ldots,y_t \in J_i(x)$. Protože v hořejším vyjádření $D^l R(x)$ vždy $u_1+u_2+\cdots+u_t \le l$, existuje číslo $s, 1 \le s \le t$, takové, že

$$u_s \le \frac{l}{t} = \frac{l}{|J_i(x)|} < \frac{m|J_i(x)|}{|J_i(x)|} = m \ .$$

Tudíž $(D^{u_s}C(X,\delta))(x,y_s) = 0_{\overline{F}}$ a každý sčítanec ve vyjádření $D^l R(x)$ má nulový faktor. Pro každé $x \in I$ proto platí

$$(D^l R)(x) = 0_F \ , \ 0 \le l < m|J_i(x)| \ .$$

Podle definice je $R(X) \in F[X, \delta_1, \dots, \delta_d]$ symetrický v $\delta_1, \dots, \delta_d$, a má celkový stupeň nejvýše

$$d(e_i pm/d + p(d-1)) = e_i pm + pd(d-1) \ .$$

Tudíž, podle lemmatu 127, $R(X) \in F[X]$ a

$$\deg(R) \le e_i pm + pd(d-1) \ .$$

Důkaz tvrzení 124 je dokončen.

4.4.4 Třetí část důkazu

Zbývá dokázat lemma 125. Budeme potřebovat ještě jedno lemma. Je-li K podpole pole L, dimenzi vektorového prostoru L se skaláry K označíme (standardně) jako $[L : K]$.

Lemma 129. *Nechť absolutně ireducibilní polynom $P \in F[X,Y]$ má stupeň $d > 0$ v neznámé Y. Nechť U a Z jsou další dvě neznámé a $\delta \in \overline{F(X)}$ a $\eta \in \overline{F(Z)}$ jsou kořeny polynomu P chápaného nejprve jako prvek $F(X)[Y]$ a pak $F(Z)[U]$, to jest*

$$P(X,\delta) \equiv 0 \quad a \quad P(Z,\eta) \equiv 0 \ .$$

Potom

$$[F(X,Z,\delta,\eta) : F(X,Z)] = d^2 \ .$$

Důkaz. Stačí dokázat, že

$$[F(X,Z,\delta,\eta) : F(X,Z,\delta)] = d \ \text{ a } \ [F(X,Z,\delta) : F(X,Z)] = d \ .$$

Dokážeme jen první rovnost, druhá se dokazuje podobně (a jednodušeji). K tomu stačí dokázat, že polynom $P(Z,U) \in F[Z][U]$ je ireducibilní v $F(X,Z,\delta)[U] = F(X,\delta)(Z)[U]$. To je ekvivalentní ireducibilitě v

$F(X,\delta)[Z][U] = F(X,\delta)[Z,U]$ (podle zobecnění tvrzení 12). Pro spor předpokládejme, že $P = P_1P_2$, kde $P_i \in F(X,\delta)[Z,U]$ a mají stupeň ostře menší než d. Rozepsáno,

$$P_i(Z,U) = \sum_{j,k} c_{i,j,k} Z^j U^k \ ,$$

kde $c_{i,j,k} \in F(X,\delta) = F(X)(\delta)$. Ale δ je algebraický nad $F(X)$, takže $F(X)(\delta) = F(X)[\delta]$ a každý prvek $c_{i,j,k}$ lze reprezentovat jako polynom v δ s koeficienty v $F(X)$.

Zvolíme $x \in \overline{F}$ tak, že není kořenem jmenovatele žádného z těchto koeficientů, v žádném $c_{i,j,k}$, a ani není kořenem koeficientu Y^d v $P(X,Y)$. Pak zvolíme $y \in \overline{F}$ tak, že $P(x,y) = 0_{\overline{F}}$. Nechť $\overline{c}_{i,j,k} \in \overline{F}$ vznikne z $c_{i,j,k}$ substitucí $X := x$ a $\delta := y$ a $\overline{P_i}(Z,U)$ vznikne z $P_i(Z,U)$ náhradou $\overline{c}_{i,j,k}$ za $c_{i,j,k}$. Z rovnosti $P = P_1P_2$ v $F(X,\delta)[Z,U]$ plyne rovnost

$$P(Z,U) = \overline{P_1}(Z,U)\overline{P_2}(Z,U)$$

v $\overline{F}[Z,U]$. (Platnost rovnosti znamená splnění d identit typu $A(X,\delta) \equiv 0$, kde $A(X,Y) \in F[X,Y]$. $P(X,Y)$ je minimální polynom δ nad $F(X)$, tudíž $A = PB$ pro nějaký $B \in F[X,Y]$. Díky volbě x a y máme $A(x,y) = P(x,y)B(x,y) = 0_{\overline{F}}$ a identity a rovnost se substitucí zachovávají.) Ta je ale ve sporu s absolutní ireducibilitou P. $\diamondsuit$

Důkaz lemmatu 125. Polynom

$$A^*(X,Y,Z;W_1,\ldots,W_d) = \prod_{i=1}^{d} A(X,Y,Z,W_i)$$

je symetrický v neznámých $W_1,\ldots,W_d$. Podle tvrzení 13 v kapitole 1

$$A^*(X,Y,Z,W_1,\ldots,W_d) = B(X,Y,Z;-e_1,e_2,-e_3,\ldots,(-1)^d e_d) \ ,$$

kde $B \in F[X,Y,Z;V_1,\ldots,V_d]$ a $e_i \in F[W_1,\ldots,W_d]$ jsou elementární symetrické polynomy. Z $\deg_W(A) \le d-1$ plyne, že B má v neznámých $V_1,\ldots,V_d$ celkový stupeň nejvýše $d-1$.

Protože

$$\delta^d = -G_1(X)\delta^{d-1} - \cdots - G_d(X)$$

(G_i je koeficient Y^{d-i} v P), pro každé $t \in \mathbf{N}$ máme vyjádření

$$\delta^{d-1+t} = G_1^{(t)}(X)\delta^{d-1} + \cdots + G_d^{(t)}(X) \ ,$$

kde $G_i^{(t)} \in F[X]$. Jak víme,

$$\deg(G_i^{(t)}) \leq t - 1 + i \ .$$

Protože $\deg_Y(B) = \deg_Y(A^*) = d \cdot \deg_Y(A) \leq d(d-1) = (d-1) + (d-1)^2$, redukcí mocnin δ^{d-1+t} pro $t \leq (d-1)^2$ dostaneme

$$B(X, \delta, Z; V_1, \ldots, V_d) = C(X, \delta, Z; V_1, \ldots, V_d) \ ,$$

kde $C \in F[X, Y, Z; V_1, \ldots, V_d]$ a $\deg_Y(C) \leq d - 1$. Co se týče stupně v X, díky $\deg(G_i^{(t)}) \leq t - 1 + i$ a $\deg_X(A) \leq p/d - d$ máme

$$\begin{aligned} \deg_X(C) &\leq \deg_X(B) + (d-1)^2 - 1 + d = \deg_X(A^*) + d(d-1) \\ &\leq d \cdot \deg_X(A) + d(d-1) \leq p - d^2 + d(d-1) \\ &< p \ . \end{aligned}$$

Předpokládejme pro spor, že $A(X, \delta, X^p, \delta^p) \equiv 0$. Nechť $\delta = \delta_1$, kde $P(X, Y) = (Y - \delta_1)(Y - \delta_2) \ldots (Y - \delta_d)$ je faktorizace P nad $\overline{F(X)}$. Pak

$$A^*(X, \delta, X^p; \delta_1^p, \ldots, \delta_d^p) \equiv 0 \ .$$

Protože, podle Viètových vztahů, $(-1)^i e_i(\delta_1, \ldots, \delta_d) = G_i(X)$, umocněním na p dostáváme $(-1)^i e_i(\delta_1^p, \ldots, \delta_d^p) = G_i(X^p)$. Tedy

$$\begin{aligned} C(X, \delta, X^p; G_1(X^p), \ldots, G_d(X^p)) &= B(X, \delta, X^p; G_1(X^p), \ldots, G_d(X^p)) \\ &= A^*(X, \delta, X^p; \delta_1^p, \ldots, \delta_d^p) \\ &\equiv 0 \ . \end{aligned}$$

Ale $\deg_Y(C) \leq d - 1$ a δ je stupně d nad $F(X)$. Proto

$$C(X, Y, X^p; G_1(X^p), \ldots, G_d(X^p)) \equiv 0$$

jako polynom z $F[X, Y]$.

Protože v F platí $X^p = X_1^p + X_2^p$, dosazením $X = X_1 + X_2$ přejde poslední identita na

$$C(X_1 + X_2, Y, X_1^p; G_1(X_1^p), \ldots, G_d(X_1^p)) + X_2^p \cdot L(X_1, X_2, Y) \equiv 0 \ ,$$

kde $L \in F[X_1, X_2, Y]$. Protože $\deg_X(C) < p$, má první sčítanec v X_2 stupeň menší než p a máme identitu

$$C(X_1 + X_2, Y, X_1^p; G_1(X_1^p), \ldots, G_d(X_1^p)) \equiv 0 \ .$$

Protože $X_1 + X_2, Y$ a X_1^p jsou algebraicky nezávislé, můžeme je nahradit neznámými X, Y a Z a dostáváme

$$C(X, Y, Z; G_1(Z), \dots, G_d(Z)) \equiv 0 \ .$$

Za Y dosadíme δ a dostáváme

$$B(X, \delta, Z; G_1(Z), \dots, G_d(Z)) = C(X, \delta, Z; G_1(Z), \dots, G_d(Z)) \equiv 0 \ .$$

Uvažme znovu faktorizaci P, nyní v neznámých Z a U:

$$P(Z, U) = (Z - \theta_1)(Z - \theta_2) \dots (Z - \theta_d) \ ,$$

kde $\theta_i \in \overline{F(U)}$. Pro $i = 1, \dots, d$ opět máme $(-1)^i e_i(\theta_1, \dots, \theta_d) = G_i(Z)$. Tudíž

$$A^*(X, \delta, Z; \theta_1, \dots, \theta_d) = B(X, \delta, Z; G_1(Z), \dots, G_d(Z)) \equiv 0 \ .$$

Pro některé i proto kořen $\theta = \theta_i$ splňuje

$$A(X, \delta, Z, \theta) \equiv 0 \ .$$

Avšak $\deg_Y(A), \deg_W(A) \leq d - 1$ a podle lemmatu 129 je množina d^2 prvků $\{\delta^j \theta^k : \ 0 \leq j, k \leq d - 1\}$ lineárně nezávislá nad $F(X, Z)$. Polynom $A(X, Y, Z, W)$ je proto identicky nulový, což je spor s předpokladem.

Tím je dokázáno lemma 125, což dokončuje důkaz tvrzení 124 a tím i tvrzení 112.

4.5 Poznámky

O historii zákona reciprocity píše Frei [16].

4.1 Konečná pole. Literatura: Ireland a Rosen [22] a Halberstam a Roth [19]. Obsáhlá monografie věnovaná teorii konečných polí a aplikacím konečných polí je Lidl a Niederreiter [25]. Její „učebnicová" verze je Lidl a Niederreiter [26].

Erdős a Turán v [15] dokázali trochu slabší výsledek, než Lindström [27] a než jak jsme zformulovali větu 93. Dokázali, že $\mathrm{Si}(n) < n^{1/2} + O(n^{1/4})$ a jejich metoda dává v O konstantu $\sqrt{2}$. Zda se dá člen $O(n^{1/4})$ nahradit menší funkcí je otevřený problém (úloha 8). Erdős publikoval domněnku, že $O(n^{1/4})$

lze zlepšit až na $O_\varepsilon(n^\varepsilon)$ pro každé pevné $\varepsilon > 0$. Další výsledky o Sidonových množinách lze nalézt například v [19], [13] a [14]. Zmíníme jeden zajímavý výsledek týkající se hustých nekonečných Sidonových množin.

Velmi jednoduše lze sestrojit Sidonovu množinu $X \subset \mathbf{N}$, která má v každém počátečním intervalu $\{1, 2, \ldots, n\}$ alespoň $cn^{1/3}$ prvků (úloha 9). Dlouho bylo známo jen mírné vylepšení, které v r. 1981 dosáhli Ajtai, Komlós a Szemerédi [1]: Existuje nekonečná Sidonova množina, která má v $\{1, 2, \ldots, n\}$ alespoň $c(n \log n)^{1/3}$ prvků. V roce 1998 Ruzsa [29] sestrojil Sidonovu množinu, která má v $\{1, 2, \ldots, n\}$ alespoň $c_\varepsilon n^{0.41421\ldots-\varepsilon}$ prvků ($0.41421\ldots = \sqrt{2}-1$). Otevřeným problémem je dosáhnout hustoty $c_\varepsilon n^{1/2-\varepsilon}$. Podle výsledku Erdőse (úloha 10) však nelze dosáhnout hustoty $cn^{1/2}$ (narozdíl od konečné verze).

V důkazu věty 94 jsme použili *rozdílovou množinu* A. Teorie rozdílových množin (difference sets) je posána například v Hallovi [20]. Tato kniha se zabývá i řadou dalších použití konečných polí v kombinatorice (konečné geometrie, kombinatorické designy, latinské čtverce, teorie kódů).

4.2 Chevalley–Warningova věta a kombinatorika. Literatura: Alon [2], Borevič a Šafarevič [8] a Schmidt [31]. Alon uvádí další aplikace Chevalley–Warningovy věty a podává zajímavý přehled algebraických metod v kombinatorice. Zobecnění věty 98 ([6]) je v článku [5]. Podle Berge–Sauerovy domněnky má každý 4-regulární graf *bez násobných hran* neprázdný 3-regulární podgraf. Domněnku dokázal v roce 1982 Taškinov [36].

Otázka, kterou v $(\mathbf{Z}, +)$ zodpověděla věta 97, se zkoumá i obecněji v $(\mathbf{Z}^d, +)$. Jako $f(n, d)$ označíme nejmenší počet m takový, že každá m-prvková posloupnost v $\mathbf{Z}^d$ obsahuje n-prvkovou podposloupnost $y_1, \ldots, y_n$ splňující $\frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \in \mathbf{Z}^d$. Alon a Dubiner [4] dokázali, že

$$f(n, d) \leq (cd \log_2 d)^d n \ ,$$

kde $c > 0$ je absolutní konstanta a $\log_2$ binární logaritmus. V pevné dimenzi d tedy pro vhodnou konstantu $c' > 0$ každých $c'n$ mřížových bodů v $\mathbf{R}^d$ obsahuje n-tici, jejíž těžiště je opět mřížový bod. Další výsledky o $f(n, d)$ a pět důkazů věty 97 lze nalézt v [3].

4.3 Zlatá věta. Literatura: Ireland a Rosen [22] a Hardy a Wright [21]. V literatuře existuje mnoho důkazů zákona reciprocity. K roku 1921 jich bylo podle Bachmana známo 56 a v současnosti už více než 100. Základních myšlenek tolik samozřejmě není, mnohé důkazy jsou jen variacemi na totéž téma. Viz třeba [9] a [17].

Zákon reciprocity kvadratických zbytků je jen jedním z řady zákonů reciprocity. V kubickém a bikvadratickém přebírají roli čísla -1 primitivní třetí a čtvrtá odmocnina z 1, čísla $\omega = (-1+\sqrt{-3})/2$ a $\sqrt{-1}$, a pracuje se v okruzích $\mathbf{Z}[\omega]$ a $\mathbf{Z}[\sqrt{-1}]$. O kubickém a bikvadratickém zákoně reciprocity se lze poučit v [22], kde je i mnoho odkazů na literaturu. Zhuštěný kurz algebraické teorie čísel vedoucí k obecnému Artinovu zákonu reciprocity poskytuje Stark [32]. Viz též [24] a [43].

Speciální případy kubického a bikvadratického zákona reciprocity publikoval Euler v letech 1748–50. V r. 1832 Gauss publikoval memoár, v němž bez důkazu uvedl bikvadratický zákon reciprocity. Důkaz měl být uveřejněn v následujícím memoáru, který však nikdy nevyšel. V r. 1844 Eisenstein publikoval několik důkazů. Kubický zákon reciprocity si nárokoval Jacobi, který podal jeho důkaz údajně ve svých přednáškách v Königsbergu v r. 1837. První publikovaný důkaz z r. 1844 však náleží Eisensteinovi. Spory o prioritu mezi Jacobim a Eisensteinem byly velmi ostré.

4.4 Weilova věta pro $F = \mathbf{Z}_p$. Literatura: Alon [2], Lidl a Niederreiter [25] a zejména Schmidt [31]. Vysvětlíme, co vlastně Weil dokázal. Nechť $F = \mathrm{GF}(q) = \mathrm{GF}(p^n)$ je konečné pole a $P \in F[X, Y]$, $d = \deg(P)$, je absolutně ireducibilní polynom. Pro $s \in \mathbf{N}$ nechť N_s označuje počet $\mathrm{GF}(q^s)$-racionálních bodů na projektivní křivce P. Podrobněji řečeno, označíme-li $G = \mathrm{GF}(q^s) = \mathrm{GF}(p^{sn})$ a $Q(X, Y, Z) = Z^d P(X/Z, Y/Z)$ (zhomogenizování P), pak

$$N_s = |\{(x, y, z) \in G^3 : \ Q(x, y, z) = 0_G\}/\sim| \ ,$$

kde $\sim$ je ekvivalence definující body projektivní roviny (dvě trojice jsou ekvivalentní, je-li jedna nenulovým skalárním násobkem druhé). *Zeta funkce* $Z(t)$ křivky P je pak definována pomocí

$$Z(t) = \exp\left(\sum_{s\geq 1} N_s t^s/s\right) .$$

V roce 1948 Weil podstatně zobecnil předchozí výsledky Artina a Hasseho a v [40] dokázal, že $Z(t)$ je racionální funkce tvaru

$$Z(t) = \frac{L(t)}{(1-t)(1-qt)} \ ,$$

přičemž $L \in \mathbf{Z}[t]$ má stupeň $2g$, kde g je rod křivky P, a konstantní člen 1. Napíšeme-li $L(t)$ jako

$$L(t) = (1-\omega_1 t)(1-\omega_2 t)\dots(1-\omega_{2g} t) \ ,$$

je $\omega_i \in \mathbf{C}^{\,\mathrm{calg}}$. Weil zejména dokázal příslušnou *Riemannovu hypotézu* pro křivky nad konečnými poli (terminologicky přesnější je mluvit o *riemannovské hypotéze*), podle níž

$$|\omega_i| = q^{1/2}$$

pro všechna $i = 1, \ldots, 2g$. Dále dokázal, že $Z(t)$ splňuje jistou funkcionální rovnici. Své fundamentální výsledky oznámil bez důkazu už v [38] a [39].

Logaritmickým derivováním formule pro $Z(t)$ a porovnáním koeficientů se lehce odvodí, že pro $s \in \mathbf{N}$ platí

$$N_s = q^s + 1 - \sum_{i=1}^{2g} \omega_i^s \ .$$

Takže, díky $|\omega_i| = q^{1/2}$,

$$|N_1 - q - 1| \leq 2gq^{1/2} \ .$$

Jak známo z algebraické geometrie, $2g \leq (d-1)(d-2)$ a $N_1 \leq N + d^2$. (N je počet řešení rovnice $P = 0_F$ v F, což je počet těch z N_1 F-racionálních bodů na projektivní křivce P, které jsou konečné.) Máme tedy odhad

$$|N - q| \leq (d-1)(d-2)q^{1/2} + d^2 \ .$$

To je explicitní forma věty 111.

Weil použil aparátu algebraické geometrie. Po publikaci [40] byly podány další důkazy Weilových výsledků, z nichž Bombieriho [7] je kromě odkazu na Riemann–Rochovu větu jinak elementární. Stěpanovovi se v letech 1969–74 podařilo v sérii článků dokázat weilovské odhady počtu N pro různé třídy polynomů P zcela elementárně, bez použití algebraické geometrie. (Z teorie zeta funkce plyne, že zdánlivě slabší odhady zbytkového členu typu $O_d(\sqrt{q})$ implikují silnější weilovské odhady s konstantou $(d-1)(d-2)$.) Nejobecnějšího výsledku dosáhl v [33] a [34]. Stěpanovovo úsilí završil Schmidt [30] přechodem k obecnému absolutně ireducibilnímu P. Stěpanovovy a Schmidtovy výsledky jsou významným úspěchem elementárních metod v teorii čísel.

Pro úplný důkaz věty 111, pro nějž je ještě třeba zavést hyperderivace, odkazujeme do Schmidtovy monografie [31]. Lze říci, že Stěpanov použil *Thueho metodu* (srovnej důkaz v oddílu 2.7), protože základem jeho postupu je sestrojení vhodného polynomu s mnoha kořeny. Vše se nakonec zredukuje, stejně jako v oddílu 2.7, na argument z lineární algebry. Podrobná diskuse výsledků o rovnicích nad konečnými poli s detailní bibliografií je v poznámkách k 6. kapitole [25].

Weil předložil v [41] ve formě hypotéz zobecnění svých výsledků pro obecnou algebraickou varietu. Přesnou formulaci *Weilových hypotéz* lze nalézt například v Maninovi a Panchiskinovi [28]. Weilovy hypotézy dokázal za pomoci velmi abstraktního aparátu v roce 1974 Deligne [10]. V r. 1978 mu za to byla udělena Fieldsova medaile. (Zde elementární přístup není zatím v dohledu.) Pro další reference k Deligneho výsledku viz [25] a [28]. Významným mezikrokem k důkazu hypotéz byla Dworkova věta [11], podle níž je zeta funkce nadplochy (variety definované jedinou rovnicí) racionální. Ekvivalentně řečeno, posloupnost $(N_s)_{s\geq 1}$ počtů $\mathrm{GF}(q^s)$-racionálních bodů na nadploše splňuje rekurenci s konstantními koeficienty. Dworkův důmyslný důkaz (bez použití algebraické geometrie, za pomoci p-adických technik) je uveden v 5. kapitole Koblitze [23].

Na Raymonda Paleyho (1907–1933), velmi talentovaného matematika a vášnivého lyžaře, který tragicky zahynul v lavině, vzpomíná Wiener [42]. Problém, zda pro každé k existuje turnaj, v němž je každých k hráčů poráženo jiným hráčem předložil v r. 1962 Schütte. O rok později Erdős [12] dokázal, že pro každé k takový turnaj s $O(k^2 2^k)$ vrcholy existuje. Erdősův odhad je výrazně lepší než ve větě 114 a důkaz doslova několikařádkový, opírá se však o nekonstruktivní obrat (o pravděpodobnostní metodu, úloha 18). Proto je Grahamova a Spencerova věta, která podává explicitní konstrukci takových turnajů, stále velmi cenná. Jejich výsledek [18], turnaj s $O(k^2 4^k)$ vrcholy, je o něco lepší než věta 114. Užili totiž silnějších odhadů pro charaktery, které však mají podstatně složitější důkaz, viz [2] a [31]. Na druhou stranu je třeba říci, že pro důkaz tvrzení 115 je tvrzení 112 zbytečně obecné. Stačí jeho verze pro polynomy $Y^d - P(X)$, která se dá dokázat snáze. Viz [31]. Informaci o dalších použitích Weilovy věty v kombinatorice lze nalézt v [2] a [35].

V lednu 2000 Tyszkiewicz [37] publikoval velmi jednoduché konstruktivní řešení Schütteho problému. Jeho konstrukce pro dané k dává turnaj se zhruba $7^{(k/2)^{2.71}}$ hráči.

4.6 Úlohy

1. (**1**) Ukažte, že konečný, ne nutně komutativní okruh, který nemá dělitele nuly (součin nenulových prvků je nenulový), je těleso.

2. (**1**) Dokažte, že každé algebraicky uzavřené pole je nekonečné.

3. (**2**) Dokažte, že algebra nad tělesem $\mathbf{R}$ se čtyřmi „imaginárními" jednotkami $1, i, j$ a k, v níž se násobí pomocí pravidel $ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$ a $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ (1 je samozřejmě neutrální prvek), je nekomutativní těleso, *těleso kvaternionů*.

4. (**2**) Pro $n \in \mathbf{N}$ buď $M \subset \mathbf{C}$ množina všech primitivních n-tých odmocnin z jedné (M má $\varphi(n)$ prvků). Dokažte, že *kruhový polynom*
$$\Phi_n(x) = \prod_{\omega \in M} (x - \omega)$$
je monický celočíselný polynom.

5. (**3**) V sérii kroků dokážeme, že každé konečné těleso je komutativní. Nechť K je konečné těleso a P jeho centrum (množina těch $x \in K$, které komutují s každým $y \in K$). Patrně je P pole a K je vektorový prostor nad P s dimenzí $n \in \mathbf{N}$. Předpoklad $n \geq 2$ přivedeme ke sporu.

   (a) Nechť $|P| = q \in \mathbf{N}$ (q je mocnina prvočísla), $g_1, \ldots, g_r$ jsou reprezentanti nejednoprvkových konjugovaných tříd $K_1, \ldots, K_r$ grupy K^*, $C_i = \{x \in K :\ g_i x = x g_i\}$ a $C_i^* = C_i \backslash \{0_K\}$. Odvoďte identitu
   $$q^n - 1 = q - 1 + \sum_{i=1}^{r} \frac{q^n - 1}{|C_i^*|}\ .$$

   (b) Dokažte, že C_i je podtěleso K obsahující P. Odvoďte, že $|C_i^*| = q^{t_i} - 1$ pro nějaké $t_i \in \mathbf{N}$, kde $t_i \backslash n$ a $t_i < n$.

   (c) Polynom $\Psi_i(x)$ definujeme vztahem
   $$\frac{x^n - 1}{x^{t_i} - 1} = \Phi_n(x)\Psi_i(x)$$
   ($\Phi_n(x)$ je kruhový polynom definovaný v předchozí úloze). Dokažte identitu
   $$q - 1 = \Phi_n(q)\Big(\prod_{d \backslash n, d < n} \Phi_d(q) - \sum_{i=1}^{r} \Psi_i(q)\Big)$$
   a odvoďte z ní, že $|\Phi_n(q)| \leq q - 1$.

   (d) Z definice $\Phi_n(x)$ odvoďte, že pro $n \geq 2$ máme $|\Phi_n(u)| > u - 1$ pro každé reálné $u \geq 2$. To je kýžený spor.

6. (**1**) Nechť G je algebraický uzávěr pole $\mathbf{Z}_p$. Dokažte, že pro $s = p^r$ tvoří kořeny polynomu $x^s - x \in G[x]$ s-prvkové podpole pole G.

7. (**2**) Dokažte identitu

$$\mathrm{e}^x = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-\mu(n)/n} \ .$$

8. (**5**) Je možné zlepšit horní odhad z věty 93 na

$$\mathrm{Si}(n) < n^{1/2} + O_\varepsilon(n^\varepsilon)$$

pro každé $\varepsilon > 0$? Nebo alespoň na $\mathrm{Si}(n) < n^{1/2} + o(n^{1/4})$?

9. (**2**) Ukažte, že existuje nekonečná Sidonova množina $X \subset \mathbf{N}$ taková, že pro $n \in \mathbf{N}$ platí

$$|X \cap \{1, 2, \ldots, n\}| \gg n^{1/3} \ .$$

10. (**3**) Dokažte, že každá (nekonečná) Sidonova množina $X \subset \mathbf{N}$ splňuje odhad

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|X \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{(n/\log n)^{1/2}} < c \ ,$$

kde $c > 0$ je absolutní konstanta.

11. (**2**) Zjistěte, pro která $n \in \mathbf{N}$ existuje 4-regulární graf na n vrcholech bez neprázdného 3-regulárního podgrafu. (Připomínáme, že naše grafy mohou mít násobné hrany.)

12. (**1**) Vnitřek každého konvexního 5-úhelníka s vrcholy v $\mathbf{Z}^2$ obsahuje mřížový bod.

13. (**2**) Platí odhady

$$(n-1)2^d + 1 \le f(n, d) \le (n-1)n^d + 1 \ .$$

(Veličina $f(n, d)$ je definovaná v poznámkách k 4.2.)

14. (**3**) Pro prvočíslo $p > 2$ dokažte identitu

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \prod_{j=1}^{(p-1)/2} \cos(2\pi j/p)$$

a odvoďte z ní důkaz druhého dodatku zákona reciprocity.

15. (**3**) *Jacobiho symbol* je pro liché $b \in \mathbf{N}$ s rozkladem $b = p_1 p_2 \dots p_r$ (prvočísla p_i nejsou nutně různá) a $a \in \mathbf{Z}$ definován pomocí

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)\left(\frac{a}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{a}{p_r}\right) .$$

Dokažte, že pro Jacobiho symbol platí zákon reciprocity a jeho dva doplňky.

16. (**3**) Nechť F je pole a

$$P(X,Y) = G_0 Y^d + G_1(X)Y^{d-1} + \cdots + G_d(X)$$

je polynom z $F[X,Y]$, přičemž $G_0 \in F$ není nula. Pokud platí, že

$$\max_{i=1,\dots,d} \deg(G_i)/i = m/d$$

s $d \perp m$, je P absolutně ireducibilní.

17. (**1**) Jakou slabší podmínkou lze nahradit (ii) v definici charakteru grupy?

18. (**2**) Na $\{1,2,\dots,n\}$ definujeme náhodný turnaj tak, že pro $1 \le i < j \le n$ s pravděpodobností $1/2$ položíme $(i,j) \in T$ a s pravděpodobností $1/2$ naopak $(j,i) \in T$. Dokažte, že pro $n \gg k^2 2^k$ má turnaj s kladnou pravděpodobností vlastnost, že každých k hráčů nějaký jiný hráč poráží.

19. (**3**) *Hamiltonova cesta* v turnaji T na množině $\{1,2,\dots,n\}$ je permutace $a_1 a_2 \dots a_n$ nosné množiny taková, že $(a_i a_{i+1}) \in T$ pro každé $i = 1,2,\dots,n-1$. Dokažte, že každý turnaj má lichý počet Hamiltonových cest.

Literatura

[1] M. Ajtai, J. Komlós and E. Szemerédi, A dense infinite Sidon sequence, *Eur. J. Comb.,* **2** (1981), 1–11.

[2] N. Alon, Tools from higher algebra, 1749–1783. In: R. L. Graham, M. Grötschel and L. Lovász (ed.), *Handbook of Combinatorics (Volume 2),* North-Holland, Amsterdam 1995.

[3] N. Alon and M. Dubiner, Zero-sum sets of prescribed size, 33–50. In: D. Miklós, V. T. Sós and T. Szönyi (ed.), *Combinatorics, Paul Erdős is Eighty (Volume 1),* János Bolyai Mathematical Society, Budapest 1993.

[4] N. Alon and M. Dubiner, A lattice point problem and additive number theory, *Combinatorica,* **15** (1995), 301–309.

[5] N. Alon, S. Friedland and G. Kalai, Regular subgraphs of almost regular graphs, *J. Comb. Theory, Ser. B,* **37** (1984), 79–91.

[6] N. Alon, S. Friedland and G. Kalai, Every 4-regular graph plus an edge contains a 3-regular subgraph, *J. Comb. Theory, Ser. B,* **37** (1984), 92–93.

[7] E. Bombieri, Counting points on curves over finite fields (d'àpres S. A. Stepanov), 234–241. In: ??? (ed.), *Séminaire Bourbaki, Exp. No. 430 (1972/73),* Springer, Berlin 1974. [Lecture Notes in Mathematics 383.]

[8] Z. I. Borevič a I. R. Šafarevič, *Tĕorija Čisel,* Mir, Moskva 1985. [Anglický překlad: Z. I. Borevich and I. R. Shafarevich, *Number Theory,* Academic Press, New York 1966.]

[9] E. Brown, The first proof of the quadratic reciprocity law, revisited, *Amer. Math. Monthly,* **88** (1981), 257–264.

[10] P. Deligne, La conjecture de Weil, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.,* **43** (1974), 273–307.

[11] B. Dwork, On the rationality of the zeta function of an algebraic variety, *Amer. J. Math.,* **82** (1960), 631–648.

[12] P. Erdős, On a problem in graph theory, *Math. Gaz.,* **47** (1963), 220–223.

[13] P. Erdős, A. Sárközy and V. T. Sós, On sum sets of Sidon sets, I, *J. Number Theory,* **47** (1994), 329–347.

[14] P. Erdős, A. Sárközy and V. T. Sós, On sum sets of Sidon sets, II, *Israel J. Math.,* **90** (1995), 221–233.

[15] P. Erdös and P. Turán, On a problem in additive number theory, *J. London Math. Soc.,* **16** (1941), 212–215.

[16] G. Frei, The reciprocity law from Euler to Eisenstein, 67–90. In: Ch. Sasaki, J. W. Dauben and M. Sugiura (ed.), *The Intersection of History and Mathematics,* Birkhäuser, Basel 1994.

[17] M. Gerstenhaber, The 152nd proof of the law of quadratic reciprocity, *Amer. Math. Monthly,* **70** (1963), 397–398.

[18] R. L. Graham and J. Spencer, A constructive solution to a tournament problem, *Canad. Math. Bull,* **1971** (14), 45–48.

[19] H. Halberstam and K. F. Roth, *Sequences,* Oxford University Press, Oxford 1966. [Reprint v r. 1983 v Springer-Verlag.]

[20] M. Hall, Jr., *Combinatorial Theory,* John Wiley & Sons, New York 1986.

[21] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers,* Oxford University Press, Oxford 1945. [Tato klasická učebnice se dočkala od r. 1938 celkem 5 vydání, posledního v roce 1979.]

[22] K. Ireland and M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory,* Springer, New York 1990.

[23] N. Koblitz, *p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions,* Springer, Berlin 1984.

[24] E. Lehmer, Rational reciprocity laws, *Amer. Math. Monthly,* **85** (1978), 467–472.

[25] R. Lidl and H. Niederreiter, *Finite Fields,* Cambridge University Press, Cambridge 1996. [Encyclopedia of Mathematics and its Applications, volume 20.]

[26] R. Lidl and H. Niederreiter, *Introduction to Finite Fields and their Applications,* Cambridge University Press, Cambridge 1994.

[27] B. Lindström, An inequality for B_2-sequences, *J. Comb. Theory,* **6** (1969), 211–212.

[28] Yu. I. Manin and A. A. Panchiskin, *Number Theory I,* Springer, Berlin 1995. [Encyclopeadia of Mathematical Sciences, Volume 49.]

[29] I. Ruzsa, An infinite Sidon sequence, *J. Number Theory,* **68** (1998), 63–71.

[30] W. M. Schmidt, Zur Methode von Stepanov, *Acta Arith.,* **24** (1973), 347–367.

[31] W. M. Schmidt, *Equations over Finite Fields. An Elementary Approach,* Springer, Berlin 1976. [Lecture Notes in Mathematics 536.]

[32] H. M. Stark, Galois theory, algebraic number theory, and zeta functions, 313–393. In: M. Waldschmidt, P. Moussa, J.-M. Luck and C. Itzykson (ed.), *From Number Theory to Physics,* Springer, Berlin 1989.

[33] S. A. Stěpanov, Congruences in two unknowns, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.,* **36** (1972), 683–711. [V ruštině.]

[34] S. A. Stěpanov, Rational points of algebraic curves over finite fields, 223–243. In: ??? (ed.), *Proceedings of the Summer School on Analytic Number Theory in Minsk,* Nauka i Technika, Minsk 1974. [V ruštině.]

[35] T. Szőnyi, Some applications of algebraic curves in finite geometry and combinatorics, 197–236. In: R. A. Bailey (ed.), *Surveys in Combinatorics, 1997,* Cambridge University Press, Cambridge, UK 1997.

[36] V. A. Taškinov, Regular subgraphs of regular graphs, *Soviet. Math. Dokl.,* **26** (1982), 37–38.

[37] J. Tyszkiewicz, A simple construction for tournaments with every k players beaten by a single player, *Amer. Math. Monthly,* **107** (2000), 53–54.

[38] A. Weil, Sur les fonctions algébriques à corps de constantes fini, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **210** (1940), 592–594.

[39] A. Weil, On the Riemann hypothesis in function fields, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.,* **27** (1941), 345–347.

[40] A. Weil, *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent,* Hermann, Paris 1948. [Actualités Sci. et Ind., no. 1041.]

[41] A. Weil, Numbers of solutions of equations in finite fields, *Bull. Amer. Math. Soc.,* **55** (1949), 497–508.

[42] N. Wiener, *I Am a Mathematician,* Victor Gollancz, London 1956. [České vydání: N. Wiener, *Můj Život,* Mladá fronta, Praha 1970.]

[43] B. F. Wyman, What is a reciprocity law?, *Amer. Math. Monthly,* **79** (1972), 571–586.