

The Art of Proving and Conjecturing *

Jaroslav Nešetřil†

This contribution is about Paul Erdős - one of the giants of mathematics of XX. century. The available space does not permit even a brief description of all his activities. For such a description one has to consult other sources which are in P. Erdős case abundant. We included a sample of these sources in the references, see e.g. [8, 4, 2, 3, 12, 9, 11]. The purpose of this brief note is to try to answer the following basic question: Given

the peculiar character of work and life style of Erdős what makes him so effective and influential mathematician? The answer is more complex than one would expect and one

has to resist the temptations to simple analogies (which is the main problem of several popular writings.) We tried (based on our encounters and collaboration with Erdős) to collect some evidence which could serve as an indication of a possible answer.

To say that Paul Erdős is one of the important mathematicians of the XX. century is both an understatement and a misinformation. The list of his achievements is very large and we shall cover a sample of it in this paper. However unlike to many mathematicians this does not exhaust his impact and rôle in the scientific community. For Erdős was a *phenomenon* of mathematics. He was both a child and a prophet of the 20th century. Deeply individual and free man, his style of a wandering scholar was to a large extent imposed on him by global politics and cold war division of the world (in his own language: neither Joe nor Sam can restrict my travel), compare [2, 8].

It is perhaps symbolical that one of the best mathematicians of this century never held a permanent job. Yet one can hear about surprising effectivity of his influence on both mathematics and academic life in general. He is rightly called one of the most influential educator of the 20th century. Yet he never *formally* supervised a thesis and the number of mathematicians which willingly acknowledge to be his pupils goes to hundreds. He never served as a Department head or a director of an Institute. Yet many academic institutions quote him as a founder and several carry his name.

Where is the key to these paradoxes, which are difficult to understand and explain? Let us try to outline what we believe are the key ingredients in this alchemy.

First of all Erdős was an outstanding mathematician. Coming from the core area of mathematics - number theory - he was a prodigy. Being supported by his understanding and loving parents (both teachers), he studied mostly privately, received his *doctorate* early and solved several problems with such a brilliance that he was nicknamed as *Zauberer*

*This paper was written at a suggestion of Josep Diaz for *Números*. With Josep we discussed the contents thoroughly and he also kindly translated the paper into Spanish. Thanks.

†DIMATIA and Department of Applied Mathematics, Charles University, Prague

von Budapest by I. Schur (one of the principal algebraicists and number theoreticians in the 30ties.) At the beginning his interest was primarily devoted to number theory. Out of his first 8² first papers published during 8 years, only 3 papers are outside number theory: 2 devoted to infinite Eulerian graphs and one devoted to (what is now known as) Ramsey theory. With a prodigious brilliance he was the author of many simple and elegant solutions. The stage has been set early: he started his life long collaboration with Turán and Davenport, went to pre-war number theory center Manchester (on an invitation of Mordell) and because of the war he continued to Princeton. Although his Princeton appointment lasted for about one year only, it is possible to say that these were his golden years. This is indicated by his spectacular output during the war years.

On the formal side his achievements are hard to repeat: for example in 1943–49 he published 49 papers in the Bulletin of the AMS and during the period 1940–1948 19 papers in Ann. of Mathematics. By 1939 (i.e. until age 26) he published 64 papers and by 1950 he published 173 papers well above the life average of most mathematicians. Slowly but steadily the number of his collaborators grew and included P. Turán, and T. Gallai from his Hungarian years, H. Davenport, R. Rado and Chao Ko from his Manchester period, M. Kac, I. Niven, A. Dvoretzky, S. Kakusani, A. Stone, L. Alaoglu, I. Kaplansky and A. Tarski from his early years in the USA.

All these facts reflect the extraordinary activity and quickness of Paul Erdős's mind. They do not reflect the depth of his mathematics. So let us briefly say that he concentrated early on some of the central problems of number theory: distribution of primes, starting with his short proof of Bertrand postulate which became the core of his PhD dissertation written as the second year undergraduate at the age of 21. This line of research culminated in his elementary proof of the *prime number theorem* (jointly and parallel with A. Selberg) and with discovery of *probabilistic method in the number theory* (in papers with P. Turán and M. Kac).

He was a champion of *elementar methods* in mathematics. That was his forte and he expressed it in his tale about the Book: There exists a book, *The Book*, which contains for every mathematical statement a shortest or most elegant, or most enlightening proof, The Book Proof. Paul Erdős used this tale in the sense of an ideal goal which we are all approaching which we are trying to approach. He used to say that when he will leave (i.e. in his language - when he will die) he will ask the God to have look in The Book. He also used to say, that *you don't have to believe in the God but you have to believe in The Book*. He rarely, if ever, claimed that a particular proof belongs to The Book (thus contradicting some claims published posthumously; see the elegant bestseller [1]).

But the quality of Erdős's research does not explain his huge mathematical influence and popularity. There are at least two other factors which we want to mention explicitly:

Paul Erdős was fortunate in his research. Many problems and results which he started to consider in the 30ies proved to be highly influential later on. That is of course primarily true for the *Probabilistic Method*: Single handedly he isolated and understood the power of elemental counting in the combinatorial (and number theoretical) context and produced a chain of seminal papers (later aided by Alfred Rényi) which established the area of *Random Graphs* and directly led to randomized methods for computation (with its spectacular recent success). It is possible to say that all his combinatorial work found applications and relevance in modern computer science. He is viewed and revered by contemporary

computer scientist as a very *modern mathematician*.

But not only that: in his early works he initiated and with a vision of a missionary created several areas of modern combinatorics. To name just few: Ramsey theory, extremal theory, non-constructive methods, partition calculus (in the infinite set theory; jointly with R. Rado and A. Hajnal), combinatorial geometry, see [8]. In 1987 P. Erdős was giving prestigious KAM-Mathematical Colloquium at Charles University and after his beautiful and exciting talk, Zdeněk Frolík (a prominent Czech topologist) remarked that ... *this Erdős is terrific. He speaks only about the theories which he founded* .

Surely Erdős was lucky but the *effectivity* of his achievements is amazing and that has to be credited to his vision and profound understanding of our science. Erdős was not a narrow specialist and in his modest way he explained this efficiency by the term *preparedness*. He used to illustrate this by another enchanting tale related to the discovery of X-rays: while Roentgen was prepared (for the discovery), Crookes (when observing earlier similar effects) issued an order that photo plates should not be stored close to the tubes.

His insight is best documented by a short note [7] which initiated density questions for Van der Waerden Theorem. This led to discoveries by Roth, Szemerédi, Furstenberg and finally to Gowers (and the last achievement was a part of Gowers' Fields Medal citation).

Last but not least the life style of wandering scholar combined with superb activity and proficiency, the deeply democratic feeling which bypassed academic rigidity in favor of cultivating of young and a legendary drive to find and help prodigies, this all profoundly changed lives at many places on Earth. Indeed, the visits of Paul Erdős changed the landscapes and rituals of our lives and brought lights of excitement and joy from mathematics and intellectual discovery. Indeed it is sad that *he would't be coming any more*. But his 485 coauthors and 5337 mathematicians with *Erdős number* 2 (see [5, 8]) and 1500 papers will guarantee that his legacy will be alive (for a recent example see [10]).

References

- [1] M. Aigner and G. Ziegler: *The Book*, Springer, 1998.
- [2] L. Babai: In and Out of Hungary: Paul Erdős His Friends and Times. In: *Combinatorics, Paul Erdős is Eighty* (Volume 2), Bolyai Soc., Budapest 1996, pp. 7-95.
- [3] L. Babai: Paul Erdős Just Left Town, Notices of the AMS 45, 1 (1998), 66-72.
- [4] B. Bollobás: Paul Erdős - Life nad Work. In: [8], pp.1-41.
- [5] R.de Castro, J. W. Grossman: Famous Trails to Paul Erdős, The Mathematical Intelligencer, 1999.
- [6] F. Chung, R. L. Graham: *Paul Erdős problems in Graph Theory*, Willey 1999.
- [7] P. Erdős, P. Turán: On some sequences of integers, J. London Math. Soc. 11 (1936), 261-264.

- [8] R. L. Graham, J. Nešetřil: *Mathematics of Paul Erdős*, Volume I, II, Springer Verlag 1999. (These volumes contain the complete list of publications and one of the best descriptions of the work and mathematical legacy of Paul Erdős.)
- [9] P. Hoffman: *The Man Who Loved Only Numbers*, Hyperion 1998. (A popular account of Erdős life - not always reliable.)
- [10] Integers - Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, visit <http://www>.
- [11] B. Schechter: *My Brain is Open: The Mathematical Journeys of Paul Erdős*, Simon & Schuster, 1998. (A popular account of Erdős life.)
- [12] J. Spencer: Uncle Paul, *Notices of the AMS* 45, 1 (1998), 64-66.

hechos, cambiaron profundamente las vidas de personas en muchos lugares de la tierra. Las visitas de Paul Erdős cambiaron los objetivos y rituales de nuestras vidas y le añadieron la efervescencia y gratificación derivadas del hallazgo científico. Ciertamente es triste ser consciente de que *él no volverá*. Pero sus 485 coautores, los 5337 matemáticos que tienen *número de Erdős* 2 ($[5, 8]^4$) y sus 1500 publicaciones son una garantía para poder afirmar que su legado perdurará por un largo tiempo (ver por ejemplo [10]).

Este artículo ha sido escrito para la revista *Números*, como consecuencia de una conversación con Josep Diaz, el cual es responsable de la traducción al español. Gracias.

References

- [1] M. Aigner and G. Ziegler: *Proof from The Book*, Springer, 1998.
- [2] L. Babai: In and Out of Hungary: Paul Erdős His Friends and Times. In: *Combinatorics, Paul Erdős is Eighty* (Volume 2), Bolyai Soc., Budapest 1996, pp. 7-95.
- [3] L. Babai: Paul Erdős Just Left Town, *Notices of the AMS* 45, 1 (1998), 66-72.
- [4] B. Bollobás: Paul Erdős - Life nad Work. In: [8], pp.1-41.
- [5] R.de Castro, J. W. Grossman: *Famous Trails to Paul Erdős*, The Mathematical Intelligencer, 1999.
- [6] F. Chung, R. L. Graham: *Paul Erdős problems in Graph Theory*, Willey 1999.
- [7] P. Erdős, P. Turán: On some sequences of integers, *J. London Math. Soc.* 11 (1936), 261-264.
- [8] R. L. Graham, J. Nešetřil: *Mathematics of Paul Erdős*, Volume I, II, Springer Verlag 1999. (Estos volúmenes contienen la lista completa de publicaciones y una de las mejores descripciones del trabajo y la herencia matemática de Paul Erdős.)
- [9] P. Hoffman: *The Man Who Loved Only Numbers*, Hyperion 1998. (A popular account of Erdős life - no siempre fiable.)
- [10] Integers - Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, visit <http://www.integers-ejnt.org>
- [11] B. Schechter: *My Brain is Open: The Mathematical Journeys of Paul Erdős*, Simon & Schuster, 1998. (Una exposición divulgadora de la vida de Erdős.)
- [12] J. Spencer: Uncle Paul, *Notices of the AMS* 45, 1 (1998), 64-66.

⁴Personas que han publicado con un coautor de Erdős

ejemplo el elegante libro [1].

Pero sólo la calidad de la investigación de Erdős no explica su inmensa influencia y popularidad entre los matemáticos contemporáneos. Existen otros factores que desearíamos mencionar explícitamente:

Se podría afirmar que Paul Erdős tuvo suerte con sus temas de investigación. Muchos de los problemas y resultados que consideró en la década de los 30, han cobrado una gran relevancia en la actualidad. Esta afirmación es particularmente cierta en el caso del *método probabilístico*: entendió la potencia de los métodos elementales de conteo en las áreas de la combinatoria y la teoría de números y produjo una secuencia de artículos seminales que dieron lugar al área de los *grafos aleatorios* y más tarde culminó en los algoritmos aleatorios que han desempeñado un papel clave en la reciente historia de la informática. Gran parte de sus publicaciones iniciales sobre el método probabilístico, fueron realizadas conjuntamente con su colega y amigo de juventud Alfred Rényi. Se puede afirmar, que todos sus trabajos en combinatoria han tenido una gran influencia y relevancia en el desarrollo de la informática. Los investigadores que trabajan en el campo de la informática, consideran a Erdős como un pionero de la informática teórica.

Sus trabajos iniciaron varias de las áreas de la combinatoria actual: La teoría de Ramsey, teoría extrema, métodos no constructivos, cálculo de particiones (conjuntamente con R. Rado y A. Hajnal), geometría combinatoria, ver [8].

En 1987 P. Erdős habló en el seminario “*KAM-Mathematical Colloquium*” de la Universidad Carolina (Praga) y después de su su magnífica clase, un prominente topólogo Checo, Zdeněk Frolík, comentó que “... *este Erdős es fantástico. Sólo habla sobre teorías que él mismo ha creado*”.

Seguramente Erdős tuvo suerte en la temática de su investigación, pero la *perdurabilidad* de sus resultados es sorprendente y se ha de reconocer que se debe a su penetrante visión y profundo conocimiento de nuestra ciencia. Erdős no era un especialista con una visión estrecha de su campo y en su peculiar y modesta forma explicó esta perdurabilidad utilizando el término *preparación*. Erdős utilizaba otra de sus encantadoras historias para ilustrar este *estar preparado*: mientras que Roentgen estaba *preparado* para descubrir los rayos-X, anteriormente cuando Crookes en su laboratorio había observado los mismos efectos que Roentgen, simplemente ordenó que las placas fotográficas se mantuvieran alejadas de los tubos.

Su profundidad matemática se observa en la breve comunicación [7] donde inició las preguntas sobre densidad del Teorema de Van der Waerden. Los problemas relacionados con la densidad de conjuntos de números eran los favoritos de Erdős. Este trabajo inicial de Erdős llevó a importantes descubrimientos de Roth, Szemerédi, Furstenberg y finalmente Gowers, y el trabajo de Gowers y Erdős fue mencionado como una de las meritos relevantes cuando le otorgaron a Gowers la Medalla Fields³.

Finalmente, otra razón que explica la profundidad y gran producción matemática de Erdős fue su estilo de “académico errante” combinado con su innata habilidad matemática y su increíble actividad. Su profundo sentido democrático que le hacía cortocircuitar la pompa y rigidez universitaria para colaborar con los estudiantes brillantes, es conocido el interés de Erdős por ayudar y promocionar jóvenes prodigios matemáticos. Todos estos

³La Medalla Fields es el equivalente del Premio Nobel en matemáticas, que únicamente se otorga a matemáticos que tengan menos de 40 años

El Arte de Conjeturar y Demostrar

Jaroslav Nešetřil

Mi contribución versa sobre Paul Erdős - uno de los pilares de la Matemática del siglo XX. El espacio disponible no permite ni una somera descripción de todas sus múltiples actividades. Recomendamos al lector interesado, que consulte la abundante bibliografía existente sobre la figura de P. Erdős. Incluimos una muestra de dichas fuentes en las referencias la final del artículo [8, 4, 2, 3, 12, 9, 11]. El propósito de esta breve nota, es intentar responder a la siguiente pregunta básica:

Dado el carácter peculiar del estilo de vida y de trabajo de Erdős, ¿cual es la razón por la que se ha convertido en uno de los matemáticos más influyentes del siglo XX?

La respuesta a esta pregunta es mucho más compleja de lo que cabría esperar, y no se debería recurrir a la utilización de analogías con otros matemáticos, como se ha hecho en algunos artículos y libros existentes sobre la vida de Erdős. Hemos intentado recoger la evidencia que pueda ayudar a dar una respuesta a la pregunta formulada más arriba, esta evidencia es fruto de los muchos ratos pasados con Erdős, y la colaboración científica del autor con Erdős.

Decir que Paul Erdős es uno de los matemáticos más importantes del siglo XX, es simplemente anecdótico y poco informativo. Su producción científica es inmensa, y en este artículo únicamente mencionaremos una pequeña muestra. A diferencia de otros matemáticos prolíficos, Erdős ha tenido una gran relevancia e impacto en la comunidad científica. En cierta manera, se puede considerar a Erdős como un “fenómeno” de las Matemáticas que ha tenido el doble papel de hijo y profeta del siglo XX. Profundamente personal y libre, su estilo de “académico errante” le fué impuesto por la situación política global en Europa y la guerra fría (en su peculiar lenguaje: “ni Joe ni Sam pueden restringir mis viajes”)¹[2, 8].

Quizás sea todo un símbolo que uno de los mejores matemáticos del siglo, nunca tuvo una posición permanente en una universidad o un centro de investigación. Y sin embargo ha tenido una sorprendente e inmensa influencia en las Matemáticas y en la vida académica de las últimas décadas. Se le considera uno de los *educadores* más influyentes del siglo. Aunque formalmente nunca dirigió una tesis, cientos de matemáticos se reconocen como discípulos suyos. Nunca ocupó cargo de director, decano o similares en institución alguna, sin embargo varias prestigiosas instituciones le consideran uno de sus fundadores y varios centros de investigación llevan su nombre.

¿Cual es la clave de estas paradojas difíciles de explicar y entender? Intentaremos esbozar lo que creemos que son los ingredientes fundamentales en esta alquimia.

En primer lugar, Erdős fue un matemático de primera línea. Niño prodigio, gran parte de su educación básica le fue dada de forma personalizada por sus padres, que eran profesores de enseñanza secundaria. Obtuvo muy joven su *grado de doctora* y resolvió de

manera tan elegante varios problemas de teoría de números que I. Schur² le denominó como *Zauberer von Budapest* (el mago de Budapest). Al comienzo de su carrera científica, su interés mayoritario fue en teoría de números. Durante sus primeros 8 años, de las (8²) publicaciones realizadas, únicamente 3 artículos no pertenecen a este campo: dos artículos que tratan sobre grafos eulerianos infinitos y un artículo que está dedicado a lo que actualmente se conoce como teoría de Ramsey.

Fue autor de múltiples soluciones elegantes y simples a problemas difíciles. Inmediatamente después de terminar su doctorado en Budapest, fue invitado por Mordell a pasar dos años en Manchester, que en la década de los 30 se consideraba uno de los centros más importantes en teoría de números, y a causa de la guerra, en lugar de retornar a Budapest fue a Princeton. Aunque su posición en Princeton únicamente duró un año (un hecho que es otra paradoja en sí mismo), permaneció en los EEUU varios años, viviendo de préstamos de amigos y algún trabajo docente eventual. Se puede afirmar que estos años fueron su época dorada. Esta afirmación viene refrendada por su espectacular producción científica durante ese periodo y que es difícil de repetir: por ejemplo en el periodo 1943–49 publicó 49 artículos en el Bulletin of the AMS y durante el periodo 1940–1948 publicó 19 artículos en Annals of Mathematics. En 1939, a la edad de 26 años, había publicado 49 artículos y en 1950 la cifra de artículos publicados alcanzaba 173, cifra superior a la media de artículos publicados por la mayoría de los matemáticos durante toda su vida activa. Poco a poco la lista de sus coautores fue aumentando y entre otros podemos destacar a P. Turán y T. Gallai desde sus años de estudiante en Budapest, H. Davenport, R. Rado y Chao Ko de sus años en Manchester, M. Kac, I. Niven, A. Dvoretzky, S. Kakusani, A. Stone, L. Alaoglu, I. Kaplansky y A. Tarski de sus primeros años en los EEUU.

Estos hechos son un reflejo de la extraordinaria actividad y agudeza mental de Paul Erdős. Pero no son una indicación de la amplitud y profundidad de sus Matemáticas. Por lo tanto hagamos un somero repaso a algunos de sus temas de investigación. Como ya hemos apuntado, al comienzo de su carrera se concentró en la teoría de números: problemas relacionados con la distribución de primos, comenzando con su escueta demostración del postulado de Bertrand, que constituyó el núcleo de su disertación doctoral, finalizada a la edad de 21 años. Esta línea de investigación culminó con una demostración elemental del *teorema del número primo*, escrito conjuntamente con A. Selberg, y con la creación del *método probabilístico en teoría de números*, realizada conjuntamente con P. Turán y M. Kac.

Fue un ardiente defensor de las *demostraciones elementales*. Este era su máxima fuerza y la expresaba en su símil sobre El Libro: Existe un libro, *El Libro*, que para cada enunciado matemático, contiene la demostración más simple y elegante, o la demostración más ilustrativa: *La Demostración del Libro*. Paul Erdős utilizaba este símil para indicar una meta ideal a la que se ha de llegar en Matemáticas, la elegancia en las demostraciones. A menudo decía que cuando se marchase (en su lenguaje cuando muriese) únicamente le pediría a Dios que le permitiese mirar en las páginas de El Libro. Otra de sus máximas famosas era que *no es necesario creer en Dios, pero es imprescindible creer en El Libro*. Casi nunca, por no decir nunca, afirmó que una demostración particular perteneciese a El Libro, contrariamente a algunas afirmaciones realizadas después de su muerte, como por

²I. Schur fue uno de los matemáticos importantes en la década de los 30, que trabajó en el campo del álgebra y de la teoría de números

¹Joe se refería a la Unión Soviética y Sam a los EEUU