Topologické metody v kombinatorice - 5. série

Nápověda: 3. 1. 2008

Řešení: 10. 1. 2008

$\mathbb{Z}_2$-akce a $\mathbb{Z}_2$-index

1. Nechť K je abstraktní simpliciální komplex – hranice $(n-1)$-rozměrného simplexu. Tj. $\mathsf{K} = 2^{[n]} \setminus \{[n]\}$ a nechť L je první barycentrické podrozdělení K (množina vrcholů L je tvořena všemi vlastními neprázdnými podmnožinami $[n]$). Nechť $\nu\colon V(\mathsf{L}) \to V(\mathsf{L})$ je simpliciální zobrazení definované pro $F \in V(\mathsf{L})$ jako $\nu(F) = [n] \setminus F$. Pořádně dokažte, že $(\|L\|, \|\nu\|)$ je volný $\mathbb{Z}_2$-prostor. (**2 body**)
2. Nechť K je simpliciální komplex a ν je volná simpliciální $\mathbb{Z}_2$-akce[1] na K. Dokažte, že pro každou $F \in \mathsf{K}$ platí $F \cap \nu(F) = \emptyset$. (**3 body**)
3. Uveďte příklad volného $\mathbb{Z}_2$-prostoru X takového, že $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X) = \infty$. (**2 body**)
4. Nechť (X, ν) je metrický volný $\mathbb{Z}_2$-prostor[2]. Dokažte, že $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X) \geq n$, právě když pro každé pokrytí X uzavřenými množinami $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$ existují $x \in X$ a $i \in [n+1]$ taková, že $\{x, \nu(x)\} \subseteq F_i$. (**6 bodů**)

k-souvislost

5.
   (a) Nechť X je prostor, který není k-souvislý. Dokažte, že $X \times Y$ není k-souvislý pro žádné Y.

   (b) Předpokládejme, že prostory X a Y jsou k-souvislé. Dokažte, že i $X \times Y$ je k-souvislý.

   (**3 body**)
6. Nechť X a Y jsou homotopicky ekvivalentní prostory. Dokažte, že pokud je prostor X k-souvislý, potom je k souvislý i Y. (**2 body**)

[1] Formálně, ν je simpliciální a $\|\nu\|$ je $\mathbb{Z}_2$-akce.

[2] Symbolem ν myslíme $\mathbb{Z}_2$-akci a nikoliv metriku na X.