Topologické metody v kombinatorice - 4. série

Nápověda: 13. 12. 2007
Řešení: 20. 12. 2007

Řetězce

1. Nechť C_k je k-řetězec v simpliciálním komplexu K a $f\colon \mathsf{K} \to \mathsf{L}$ je simpliciální zobrazení. Dokažte, že $\partial f_{\#,k}(C_k) = f_{\#,k-1}(\partial C_k)$. (**2 body**)

Variace na Ham Sandwich Theorem

V následujících příkladech není klíčové, že se jedná o kompaktní podmnožiny $\mathbb{R}^2$. U všech příkladů by namísto kompaktních podmnožin mohly vystupovat konečné borelovské míry takové, že každá přimka má nulovou míru. Snaha je, aby příkladům rozuměli i ti, co teorii míry neznají. Pokud naopak máte problémy i s obsahem (mírou) obecných kompaktních množin, řešte úlohy alespoň pro mnohostěny.

2. Dokažte, že každou kompaktní podmnožinu $\mathbb{R}^2$ lze rozřezat dvěma přímkami na 4 části o stejném obsahu. (**1 bod**)
3. Rozhodněte, zda každou kompaktní $\mathbb{R}^2$ lze rozřezat třemi přímkami procházejícími týmž bodem na 6 částí o stejném obsahu. (**6 bodů**)
4. Ukažte, že $1:1$ je jediný poměr takový, že libovolné dvě kompaktní podmnožiny $\mathbb{R}^2$ lze obě rozdělit přímkou v tomto poměru. (**2 body**)

Kneserovy grafy

5. V závislosti na přirozeném n a k (kde $n \geq 2k-1$) určete minimální možnou délku lichého cyklu v Kneserově grafu $\mathrm{KG}_{n,k}$. (**3 body**)
6. V závislosti na přirozeném n a k (kde $n \geq 2k-1$) určete maximální možný počet vrcholů úplného bipartitního podgrafu $\mathrm{KG}_{n,k}$. (**2 body**)

Poznámka: V případě, že budete za účelem vyřešení některého z příkladů definovat nějakou složitější spojitou funkci. Mělo by být z vašeho popisu jasné, že se jedná o spojitou funkci, ale nemusíte spojitost dokazovat do všech detailů.