Topologické metody v kombinatorice - 3. série

Nápověda: 22. 11. 2007
Řešení: 29. 11. 2007

Verze Borsukovy-Ulamovy věty

V příkladech, kde neplyne ze zadání jinak, můžete používat libovolnou verzi Borsukovy-Ulamovy (či Ljusternikovy - Šnireľmanovy) věty uvedenou na přednášce.

1. Dokažte přímo 1-dimenzionální verzi (LS-o) Ljusternikovy-Šnireľmanovy věty, tj. dokažte, že pro každé pokrytí S^1 dvěma otevřenými množinami existuje dvojice antipodálních bodů obsažená v jedné z množin. (**2 body**)
2. Nechť T je torus reprezentovaný jako $S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^4$.
   (a) Nalezněte příklad spojitého $f\colon T \to \mathbb{R}^2$, pro které neexistuje $\mathbf{x} \in T$ takové, že $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$. (**2 body**)
   (b) Dokažte, že pro každé spojité $f\colon T \to \mathbb{R}$ existuje $\mathbf{x} \in T$ takové, že $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$. (**1 bod**)
3.
   (a) Dokažte následující zobecnění Ljusternikovy-Šnireľmanovy věty: Když je S^n pokryta $n+1$ množinami $A_1, A_2, \dots A_{n+1}$ a každá A_i je otevřená nebo uzavřená, potom existuje i takové, že $A_i \cap (-A_i) \neq \emptyset$. (**4 body**)
   (b) Rozhodněte, pro která $n \geq 0$ platí: Kdykoliv je S^n poktryta $n+1$ množinami $A_1, A_2, \dots A_{n+1}$ takovými, že každé A_i vznikne z otevřených podmnožin S^n pouze používáním množinových operací sjednocení, průniku a množinového rozdílu, potom existuje i takové, že $A_i \cap (-A_i) \neq \emptyset$. (**2 body**)
4. Dokažte, že Borsukova-Ulamova věta je ekvivalentní tvrzení, že antipodální zobrazení $f\colon S^n \to S^n$ nikdy není nulhomotopické.
   (**6 bodů**)