Topologické metody v kombinatorice - 2. série

Nápověda: 1. 11. 2007
Řešení: 8. 11. 2007

Simpliciální komplexy

1. Nakreslete triangulaci toru s co možná nejmenším počtem simplexů, nemusíte dokazovat, že se jedná o nejmenší možný počet. **(2 body)**
2. Šachovnicový komplex $\mathsf{S}_{m,n}$ je definován tak, že jeho vrcholy jsou pole šachovnice $m \times n$ a jeho stěny jsou takové množiny polí, že žádné dvě neleží ani ve stejném řádku ani ve stejném sloupci (tj., položíme-li na ně věže, tak se navzájem neohrožují). Popište geometricky $\mathsf{S}_{3,4}$. **(3 body)**
3. Nechť K je simpliciální komplex a nechť $\sigma \in \mathsf{K}$ je jeho stěna, která je obsažena v jediné maximální $\tau \in \mathsf{K}$; $\sigma \subsetneq \tau$. Elementárním kolapsem budeme rozumět operaci, kdy z komplexu K utvoříme komplex K', jehož vrcholy se shodují s vrcholy K a jehož množinou stěn je množina stěn K bez následující množiny:
$$\{\vartheta \in \mathsf{K} | \sigma \subseteq \vartheta \subseteq \tau\}.$$
Pořádně dokažte, že K a K' jsou homotopicky ekvivalentní. **(4 body)**
4. Nechť G je bipartitní graf s partitami A a B. Definujme N_A jako simpliciální komplex s množinou vrcholů A a stěnami takovými podmnožinami A, že jejich vrcholy mají společného souseda v B. Simpliciální komplex N_B je definován analogicky. Dokažte, že N_A je homotopicky ekvivalentní N_B. **(6 bodů)**