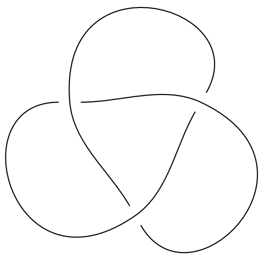
Topologické metody v kombinatorice - 1. série

Nápověda: 25. 10. 2007
Řešení: 1. 11. 2007

Základy obecné a algebraické topologie

1. Dokažte, že následující dvě definice spojitosti funkce $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ jsou ekvivalentní:
   (i) Je-li $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená, potom je i $f^{-1}(U)$ otevřená v $\mathbb{R}^m$.
   (ii) Pro každé $a \in \mathbb{R}^m$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $b \in \mathbb{R}^m$ splňující $|b - a| < \delta$ platí $|f(b) - f(a)| < \varepsilon$.
   (2 body)
2. Rozdělte následující prostory do tříd ekvivalence homeomorfismu: $\mathbb{R}$, $[0, 1]$, $(0, 1)$, S^1, množina $U \subseteq \mathbb{R}^3$ tvořící uzel (viz obrázek). Zdůvodněte. **(2 body)**



3. Nechť X, Y jsou topologické prostory, $f: X \to Y$ spojitá funkce a $M, N \subseteq X$. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení:
   (a) Je-li M uzavřená, potom je i $f(M)$ uzavřená. **(1 bod)**
   (b) Je-li M otevřená, potom je i $f(M)$ otevřená. **(1 bod)**
   (c) Je-li M souvislá, potom je i $f(M)$ souvislá. **(1 bod)**
   (d) Je-li M nesouvislá, potom je i $f(M)$ nesouvislá. **(1 bod)**
   (e) Je-li M uzavřená a N kompaktní, potom je i $M \cap N$ kompaktní. **(1 bod)**
4. Nechť X je pokryto konečně mnoha uzavřenými množinami A_1, A_2, ... , A_n a nechť $f: X \to Y$ je zobrazení, jehož restrikce na každé A_i je spojitá. Dokažte, že f je spojité. **(2 body)**
5. Prostor X získáte tak, že ve dvojrozměrné sféře spojíte severní a jižní pól úsečkou. Prostor Y získáte tak, že k dvojrozměrné sféře přilepíte kružnici (dotýkající se jí v jednom bodě). Dokažte, že X a Y jsou homotopicky ekvivalentní. **(3 body)**
6. Dokažte, že topologický prostor X je kontraktibilní, právě když
   (a) pro každý topologický prostor Y a každé spojité $f: X \to Y$ je f nulhomotopické.
   (b) pro každý topologický prostor Y a každé spojité $f: Y \to X$ je f nulhomotopické.
   (3 body)