9. série

(4. prosince 2008)

1. úloha Dokažte, že existuje spojitá funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že $f + g$ není rostoucí pro žádnou diferencovatelnou funkci g.

2. úloha Na večírku se sešlo n manželských párů. Jeden z přítomných byl sociolog a tak se rozhodl udělat malý průzkum. Na konci večírku se každého přítomného (samozřejmě kromě sebe) zeptal, s kolika lidmi si během večírku potřásl rukou. Dostal $2n - 1$ různých odpovědí. Navíc víme, že nikdo z přítomných si nepotřásl rukou s vlastní manželkou. S kolika lidmi si potřásla rukou manželka sociologa?

3. úloha Nechť $ABCDEFGHIJKL$ je pravidelný dvanáctiúhelník v rovině. Dokažte, že úhlopříčky AI, BK a DL se protínají ve společném bodě. Dokažte, že úhlopříčky AH, BJ, CK a EL se protínají ve společném bodě.

4. úloha Tři různé body s celočíselnými souřadnicemi leží v rovině na kružnici o poloměru $r > 0$. Dokažte, že alespoň dva z nich mají vzdálenost vetší než $r^{\frac{1}{3}}$.

5. úloha Nechť $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ vztah $f(f(n)) = 2f(n) - n$. Označme $M = \{f(n) - n, n \in \mathbb{N}\} \setminus \{0\}$. Dokažte, že je-li M neprázdná, pak

$$0 < \sum_{m \in M} \frac{1}{m} \leq 1.$$

6. úloha Nechť $\mathcal{H}$ je n-uniformní hypergraf, který má méně než $\frac{k^{n-1}}{(k-1)^n}$ vrcholů. Dokažte, že jeho vrcholy lze obarvit k barvami tak, že každá hrana obsahuje vrcholy všech barev (n-uniformním hypergrafem $\mathcal{H}$ rozumíme systém množin takový, že každá množina $A \in \mathcal{H}$ má právě n prvků, množiny A jsou hrany hypergrafu, jejich prvky se nazývají vrcholy).